कक्षा 9th गणित

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन
(Surface area and volume)

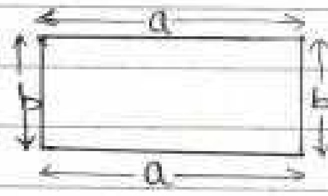
प्रकृति में हम जिस ओर भी देखते हैं हमे लगभग समतल एवं ठोस आकृतियाँ ही दिखाई देती है। समतल आकृतियाँ द्विविमीय तथा ठोस आकृतियाँ त्रिविमीय कहलाती है।

द्विविमीय आकृतियाँ (2D) जैसे त्रिभुज, आयत, वर्ग, वृत्त आदि।
त्रिविमीय आकृतियाँ (3D) जैसे घन, घनाभ, बेलन, गोला, शंकु आदि।

समतल आकृतियाँ जो बन्द हैं उनका परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं

परिमाप :→ किसी बंद आकृति के घेरे की कुल लम्बाई परिमाप कहलाती है,
हम निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात करेंगे अर्थात सूत्र का निगमन करेंगे।

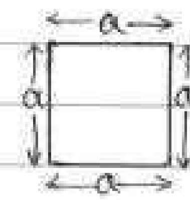
आयत का परिमाप :- यदि आयत की लं० a और चौ० b है। तो कुल घेरे की लम्बाई परिमाप कहलायेगी।



चित्र 1

∴ लं० + चौ० + लं० + चौ० = $a+b+a+b = 2a+2b = 2(a+b)$
या आयत का परिमाप = 2×(लं० + चौ०)

वर्ग का परिमाप :- यदि वर्ग की एक भुजा a हो तो वर्ग की सारी भुजाएँ $a+a+a+a$ होगी।



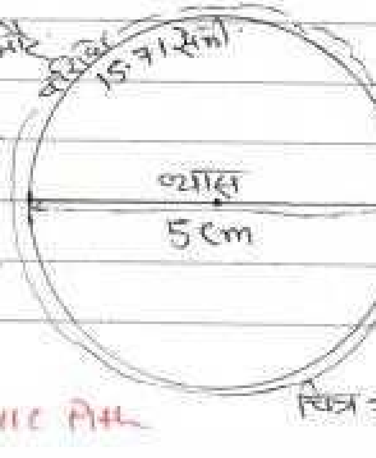
चित्र 2

∴ वर्ग का परिमाप = $a+a+a+a = 4a$ = 4 × भुजा

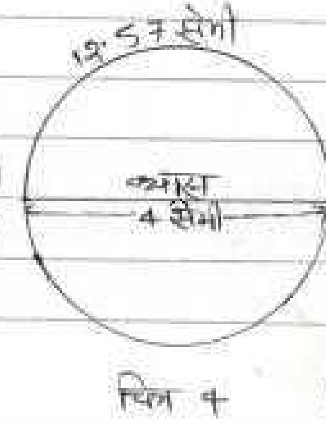
वृत्त का परिमाप :- वृत्त के परिमाप को परिधि भी कहते हैं,

प्रयोग के तौर अलग-2 वृत्त खींचे और उनके घेरे और व्यास का अनुपात ज्ञात करें तो हमे एक निश्चित मान की प्राप्ति होती है। जैसे

$\frac{15.71}{5} = 3.14$, $\frac{12.57}{4} = 3.14$



चित्र 3



चित्र 4

इसी प्रकार आप अन्य वृत्त खींच कर भी परिधि और व्यास का अनुपात ज्ञात कर सकते हैं। सभी प्रयोगों में हमें अनुपात का मान 3.14 के लगभग प्राप्त होता है। इस स्थिर मान को π (पाई) कहते हैं।

$\therefore \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$ या परिधि = π × व्यास

या परिधि = π × 2 × त्रिज्या

= 2π त्रिज्या या 2πr

$\boxed{\text{परिधि} = 2\pi r}$ जहाँ (r वृत्त की त्रिज्या है)

क्षेत्रफल :-

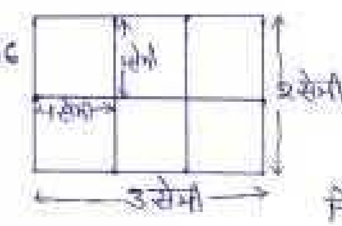
क्षेत्रफल का अर्थ है कि किसी समतल को ढकने के लिए कितने समान टुकड़े या इकाई चाहिए।

आयत का क्षेत्रफल :-

समान चित्र सं- 4 को देखने से पता चलता है कि इस आयत को 6 वर्ग समान टुकड़ों ने ढक रखा है।

अतः आयत का क्षेत्रफल = 6 वर्ग इकाई

उपरोक्त को हम सूत्र में ढाल सकते हैं।



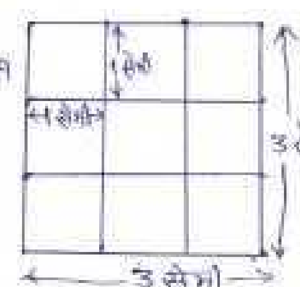
चित्र (5)

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई (3 सेमी.) × चौ० (2 सेमी.) = 6 वर्ग सेमी

$\boxed{\text{आयत का क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}}$

वर्ग का क्षेत्रफल :-

चित्र 5 को देखने से ज्ञात होता है कि वर्गाकार आकृति को 9 समान टुकड़ों ने ढक रखा है।



चित्र (6)

अतः वर्ग का क्षे० = 9 वर्ग इकाई

या 9 वर्ग सेमी

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = 3 × 3 = 9 वर्ग सेमी

= ल० × चौ०

= ल० × ल० { वर्ग की भुजा बराबर होती है

= (लम्बाई)^2

$\boxed{\text{वर्ग का क्षेत्रफल} = \text{भुजा}^2}$

समकोण Δ का क्षेत्रफल :-

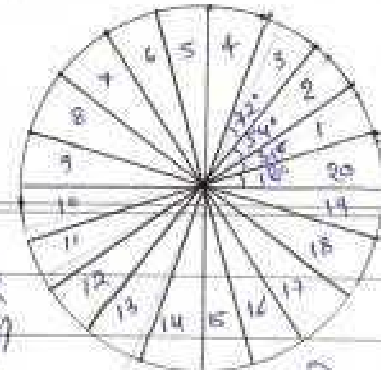
समकोण Δ का क्षेत्रफल आयत के क्षे० का आधा होता है।

चित्र (7)

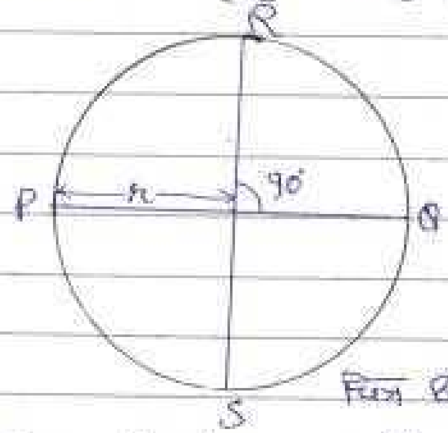
∴ समकोण Δ का क्षे० $= \frac{\text{ल०} \times \text{चौ०}}{2} = \frac{l \times b}{2} = \frac{1}{2} lb$

या $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई { l को आधार एवं b को ऊँचाई कहा जा सकता है }

वृत्त का क्षेत्रफल :- कार्ड शीट पर वृत्त की आकृति बना कर चार बराबर भाग कर लेते है। एक भाग 90° का होता है उसके भी 5-5 भाग कर लेते हैं प्रत्येक टुकड़ा $90/5 = 18°$ का होगा इस प्रकार कार्ड शीट के 20 टुकड़े बने। इन कटे टुकड़ो को आयत की आकृति मे निम्न प्रकार से व्यवस्थित करने पर प्राप्त होता है -

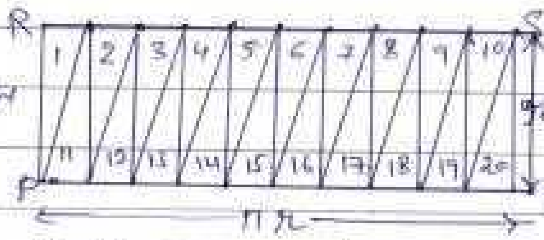


चित्र (9)



चित्र 8

चित्र (10)



चित्र (11)

चित्र 11 मे बने आयत की ल० वृत्त की परिधि $2\pi r$ की आधी होगी क्योंकि वृत्त की परिधि के दो बराबर भाग है तथा चौड़ाई त्रिज्या r के बराबर होगी।

$\therefore$ आयत का क्षे० = लम्बाई × चौ०

$= \pi r \times r = \pi r^2$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

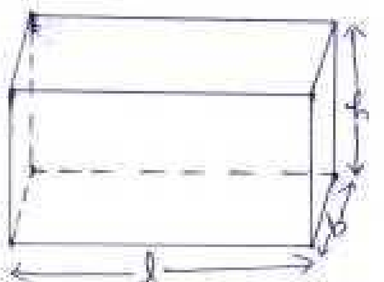
या

$$\boxed{\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi \times (\text{त्रिज्या})^2}$$

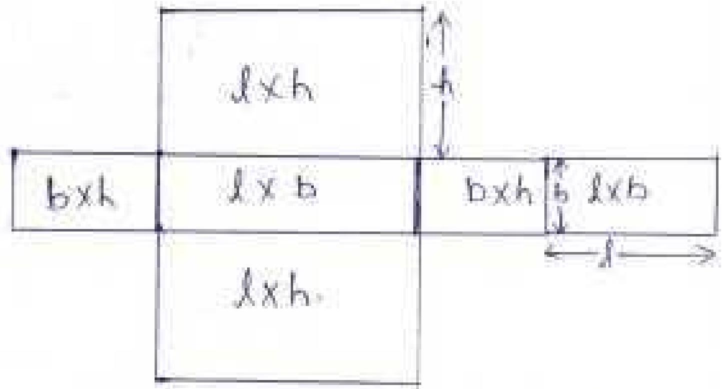
SDS
M.P. Singh GIC Atu.

घनाभ एवं घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल :-

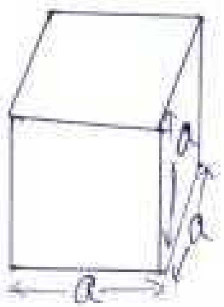
यदि हम घनाभ या घन के आकार के डिब्बे को काटें तो निम्न प्रकार की आकृति प्राप्त होगी—



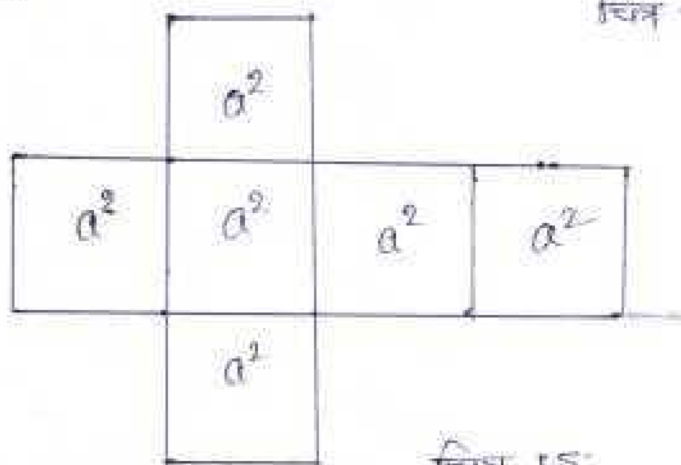
चित्र 12



चित्र 13



चित्र 14



चित्र 15

चित्र 13 के सभी आयतों के क्षेत्रफलों का योग

$= b\times h + l\times h + l\times b + l\times h + b\times h + l\times b$

$= 2(l\times b) + 2(b\times h) + 2(l\times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

$\therefore$ $\boxed{\text{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2(lb+bh+hl)}$

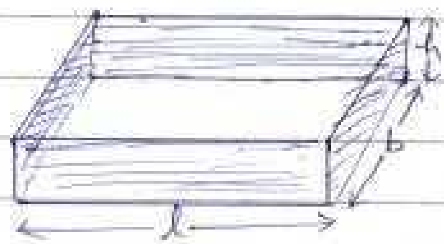
इसी प्रकार चित्र 15 से घन के सभी वर्गों के क्षेत्रफलों का योग $= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$

$= 6a^2$

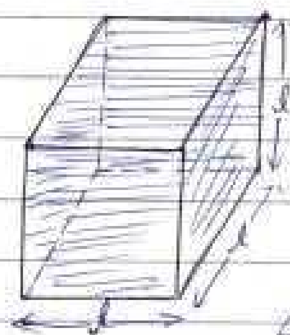
$\therefore$ $\boxed{\text{घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 6a^2}$

घनाभ तथा घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल :-

घनाभ व घन के छः फलकों में आधार तथा ऊंचाई को छोड़कर चार फलकों के क्षेत्रफलों के योग को घनाभ तथा घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल कहते हैं।



चित्र 16



चित्र 17

घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = चारों दिवारों का क्षेत्रफल

$= l\times h + b\times h + l\times h + b\times h$

$= 2(b\times h) + 2(l\times h) = 2(\cancel{lb})\times h$

$= 2(l+b)\times h$

$\therefore$ $\boxed{\text{घनाभ का पार्श्वीय पृष्ठ} = 2(\text{लम्बाई} + \text{चौ०})\times \text{ऊँचाई}}$

चित्र 17 से घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = चारों फलकों का क्षेत्रफल

$= 4\times(l\times l) = 4l^2$

$\boxed{\text{अत: घन का पार्श्वीय पृष्ठ} = 4\times(\text{भुजा})^2}$

प्रश्न :- 1.5 मी० लम्बा, 1.25 मी० चौड़ा और 65 cm गहरा प्लास्टिक का एक डिब्बा बनाया जाना है। इसे ऊपर से खुला रखना है। प्लास्टिक शीट की मोटाई को नगण्य मानते हुए डिब्बा बनाने के लिए आवश्यक प्लास्टिक शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :- ∵ डिब्बे की लम्बाई $l = 1.5$ मी.
" " चौ. $b = 1.25$ मी.
" " ऊँ. $h = 65$ सेमी. $= \frac{65}{100} = 0.65$ मी.

∵ डिब्बा खुला रखना है

∴ डिब्बे का पार्श्वीय पृष्ठ + तल का पृष्ठ

$= 2(l+b) \times h + l \times b$

$= 2(1.5+1.25) \times 0.65 + 1.5 \times 1.25$

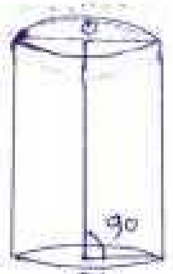
$= 5.45$ मीटर^2 उत्तर

लम्ब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल :-

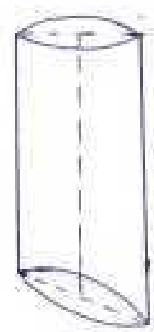
ऐसा बेलन जिसका आधार वृत्ताकार है और लाम्बिक रूप में ऊपर की ओर खड़ा हुआ है लम्ब वृत्तीय बेलन कहलाता है। निम्न चित्र में लम्ब वृत्तीय बेलन को पहिचानें —

चित्र 18 लम्ब वृत्तीय बेलन है।

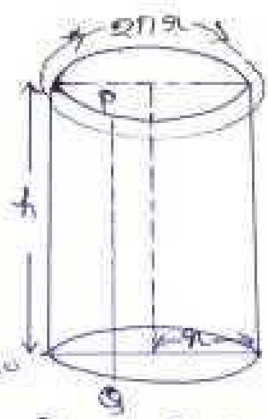
चित्र 19 लम्ब वृत्तीय बेलन नहीं है।



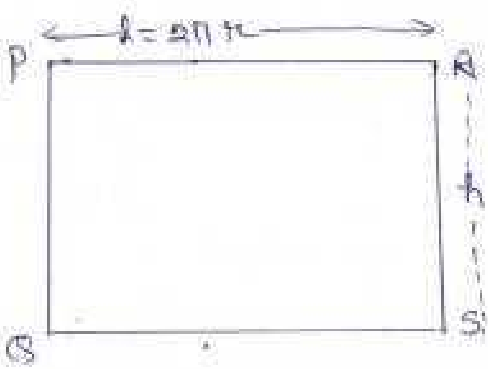
चित्र 18



चित्र 19



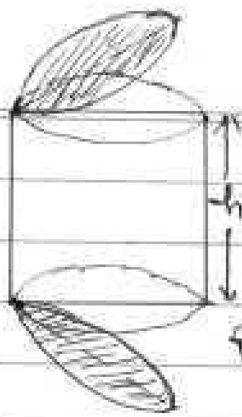
चित्र 20



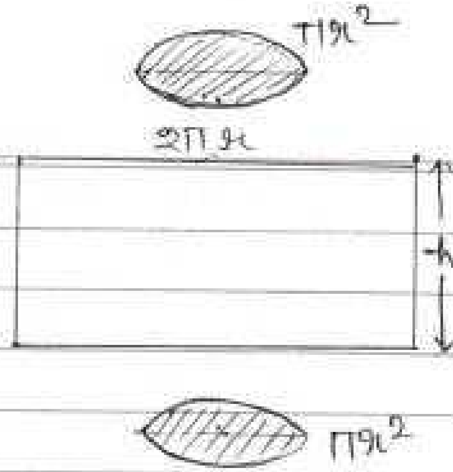
चित्र 21

बेलन को PQ की दिशा में काटने पर हमें एक आयताकार आकृति प्राप्त होती है। बेलन का पार्श्व पृष्ठ ही आयताकार आकृति है

∴ $\boxed{\text{बेलन का पार्श्व पृष्ठ} = 2\pi rh}$ {∵ आयत का क्षे० = लं० × चौ०}



चित्र 22



चित्र 23

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= $ वक्र पृष्ठ $+$ तल का पृष्ठ $+$ ढक्कन का पृष्ठ

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h+r)$

$\therefore$ $\boxed{\text{बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे० } = 2\pi r(h+r)}$

प्रश्न :- ऊँचाई 14 सेमी वाले एक लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 cm² है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल :- हमे दिया है बेलन की ऊँचाई $h = 14$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठ $= 88$ सेमी²

$\therefore$ ज्ञात करना है बेलन के आधार का व्यास

$\therefore$ हम जानते है बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$\therefore 2\pi rh = 88$

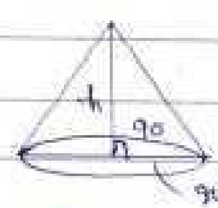
त्रिज्या $r = \frac{88}{2\pi h} = \frac{88}{2\times\frac{22}{7}\times 14} = \frac{88}{4\times 22} = 1$ सेमी

$\therefore$ व्यास $= 2\times$ त्रिज्या $= 2\times 1 = 2$ सेमी उत्तर

लम्ब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल :- निम्न चित्र में लम्बवृत्तीय शंकु को पहिचानें

चित्र 25 लम्बवृत्तीय शंकु है

चित्र 24

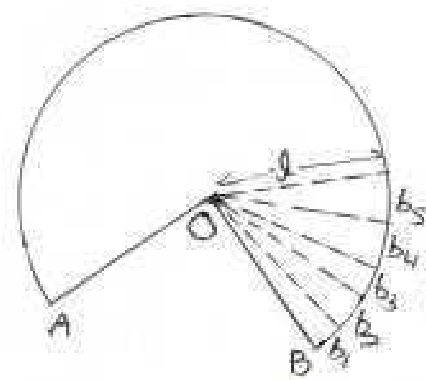


चित्र 25

किसी शंकु को खोलकर देखने पर पता चलता है कि शंकु किसी वृत्त का एक भाग है। उस वृत्त की त्रिज्या ही शंकु की तिर्यक ऊँचाई l कहलाती है और लम्बवत ऊँचाई h मानी जाती है।

चित्र 26

चित्र 27



चित्र 28

चित्र 27 के अनुसार शंकु को काट कर AB हिस्से को फैलाए तो हमे चित्र 28 की आकृति प्राप्त होती है। कागज को O से जाती हुई रेखाओं द्वारा सैकड़ो छोटे-2 टुकड़ो में विभाजित कर ले। हम देखते है कि कटे हुए टुकड़े △ के आकार के हैं प्रत्येक की ऊंचाई शंकु के तिर्यक ऊंचाई l के बराबर है।

$\therefore$ प्रत्येक △ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ प्रत्येक △ का आधार $\times l$

अतः पूरे कागज का क्षेत्रफल = सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} l (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)$$

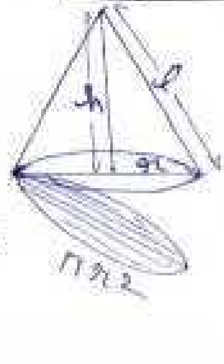
$\because$ $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ ही शंकु का आधार है अतः आधार की परिधि $= 2\pi r$ जहाँ r आधार की त्रिज्या है

$\therefore$ $\boxed{\text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$

अब यदि शंकु की ऊँचाई h, त्रिज्या r हो तो पाइथागोरस प्रमेय से (चित्र 26)

$l^2 = h^2 + r^2$ या $l = \sqrt{(h^2 + r^2)}$

$\therefore$ $\boxed{\text{शंकु की तिरछी ऊंचाई } l = \sqrt{(h^2 + r^2)}}$



चित्र 29

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल =

$=$ शंकु का वक्र पृष्ठ क्षे० + वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$

$\therefore$ $\boxed{\text{शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r (l + r)}$

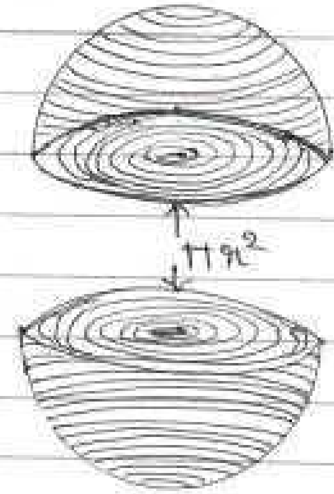
गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल :- अर्द्ध गोले के वक्राकार सतह पर एक धागा लपेटने पर हम पाते हैं कि इस धागे की लम्बाई समतल सतह पर लपेटे गये धागे से दुगुना होता है

समतल सतह का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$\therefore$ वक्राकार सतह का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

अतः अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2$



चित्र 30

$\therefore$ $\boxed{\text{गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2}$

इसी प्रकार अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

प्रश्न :- त्रिज्या 21 सेमी वाले एक अर्द्ध गोले के लिए ज्ञात कीजिए

(1) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (2) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल $\because$ दिया है अर्द्ध गोले की त्रिज्या $r = 21$ सेमी

(1) हम जानते हैं अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (21)^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= 2772$ सेमी^{2}

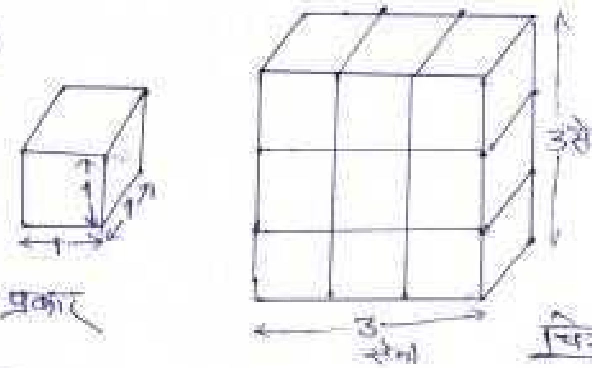
(2) अर्द्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 4158\ cm^2$

घनाभ का आयतन :-

जो ठोस वस्तुएं स्थान घेरती है इस घेरे गये स्थान के माप को उस वस्तु का आयतन कहते हैं।

संलग्न चित्र से पता चलता है कि इस घनाभ में 9 छोटे घन (टुकड़े) रखे हुए हैं अर्थात 9 घनों ने स्थान घेर रखा है इसलिए इस घनाभ का आयतन 9 घन इकाई (सेमी) हुआ।



चित्र 31

हम उपरोक्त आयतन को निम्न प्रकार से परिकलित कर सकते हैं।

आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = आयतन

या लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई = आयतन

∴ $\boxed{\text{घनाभ का आयतन = लं॰ × चौ॰ × ऊँ॰ या } l \times b \times h}$

घन का आयतन :-

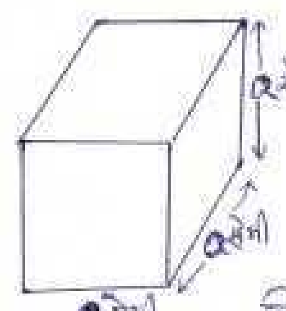
घन का आयतन भी घनाभ की भाँति ज्ञात किया जा सकता है परन्तु घन में लं॰, चौ॰ एवं ऊँचाई समान होती है।

∴ घन का आयतन = लं॰ × चौ॰ × ऊँ॰

= भुजा × भुजा × भुजा

$= a \times a \times a = a^3$

$\boxed{\text{घन का आयतन} = (\text{भुजा})^3 = a^3}$



चित्र 32

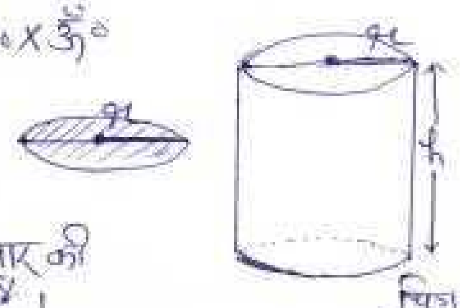
बेलन का आयतन :-

बेलन का आयतन = आधार (वृत्त) का क्षे॰ × ऊँ॰

$= \pi r^2 \times h$

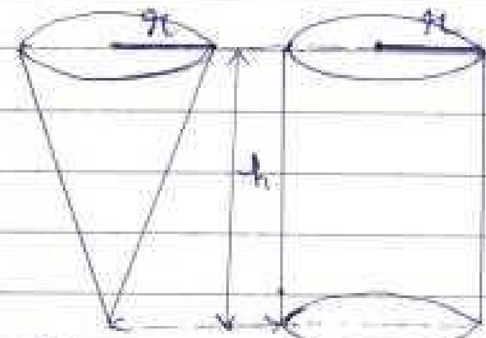
∴ $\boxed{\text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 h}$

जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या एवं h बेलन की ऊँचाई है।



चित्र 33

लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन :- यदि हम एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊँचाई वाला एक खोखला बेलन और शंकु बनाये और प्रयोग कर उनके आयतनों की तुलना करें तो हम पाते हैं कि शंकु लम्बवृत्तीय बेलन को तीन बार में जल से पूरा भरा जा सकता है।



चित्र 34

अत :-

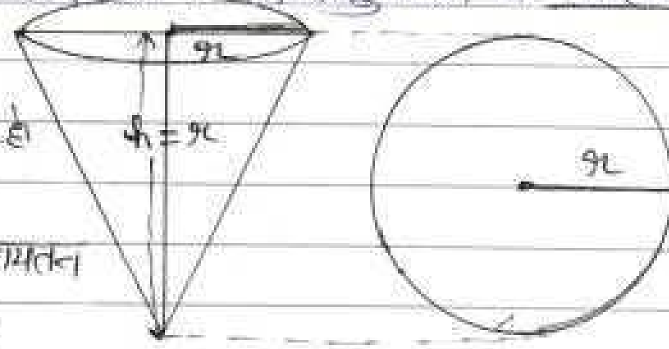
लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन

$= \frac{1}{3}$ (लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन)

$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$\therefore$ $\boxed{\text{शंकु का आयतन} = \frac{\pi r^2 h}{3}}$

गोले का आयतन :- यदि हम ~~एक ही~~ समान आधार त्रिज्या वाला और उसी त्रिज्या ~~की माप के बराबर~~ ऊँचाई वाला शंकु ले तथा उसी त्रिज्या का एक गोला ले और प्रयोग कर उनके आयतनों की तुलना करें तो हम पाते हैं कि शंकु गोले को चार बार में जल या बालु से पूरा भरता है।



यदि शंकु की त्रिज्या एवं ऊँचाई r हो और गोले की त्रिज्या भी r हो तो

गोले का आयतन = 4 × शंकु का आयतन

$= 4 \times \left(\frac{\pi r^2 r}{3}\right)$

$\therefore$ $\boxed{\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3}$

प्रश्न :- व्यास 10.5 cm वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

हल :- $\because$ अर्द्धगोले का व्यास = 10.5 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या, $r = 10.5/2$ सेमी

अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{1}{2} \times$ (पूरे गोले का आयतन) $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times \frac{10.5}{2} \times \frac{10.5}{2} = 303.18\ cm^3$

या $\frac{303.18}{1000}\ l = 0.303$ लीटर (लगभग) उत्तर

प्रश्न :- किसी शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm और 28 सेमी है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :- ∵ शंकु की ऊँचाई $h = 21$ cm

∵ " तिर्यक ऊँ० $l = 28$ cm

हम जानते हैं शंकु की तिर्यक ऊँ० $l = \sqrt{r^2+h^2}$ या $l^2 = r^2+h^2$

$r = \sqrt{l^2-h^2} = \sqrt{28^2-21^2} = 7\sqrt{7}$ cm

∴ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$

$= 7546$ cm^3 उत्तर

प्रश्न :- यदि एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षे० 94.2 cm^2 है और उसकी ऊँचाई 5 सेमी है तो ज्ञात कीजिए :- (1) आधार की त्रिज्या (2) बेलन का आयतन

हल :- (1) ∵ बेलन का पार्श्व पृष्ठ $2\pi r h = 94.2$ सेमी^{2}

बेलन की ऊँचाई $h = 5$ सेमी

∴ बेलन के आधार की त्रिज्या $r = \frac{94.2}{2\pi h} = \frac{94.2}{2 \times 3.14 \times 5}$

$= 2.99$ या 3 सेमी. उत्तर

(2) ∵ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 3 \times 3 \times 5 = 141.3$ सेमी^{3} उत्तर

प्रश्न :- किसी गोदाम की माप 40 m × 25 m × 15 m है। इस गोदाम में 1.5 m × 1.25 m × 0.5 m माप वाले लकड़ी के कितने अधिकतम क्रेट रखे जा सकते हैं?

हल :- ∵ गोदाम की माप अर्थात ल० × चौ० × ऊ० = m × 25 m × 5 m

क्रेट की माप = 1.5 m × 1.25 m × 0.5 m.

अतः क्रेटों की संख्या $= \frac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{एक क्रेट का आयतन}}$

$= \frac{40 \times 25 \times 15}{1.5 \times 1.25 \times 0.5} = 16{,}000$ क्रेट

उत्तर

———— ∞ ————

महेन्द्र प्रताप सिंह स०अ०स्ना० हे०गणित
एस०डी०एस०रा०इ०का० पिथौरागढ़ ।