

संख्या पद्धति

कक्षा:—9

परिमेय संख्या:— परिमेय संख्या एक ऐसी संख्या है जिसे हम $\frac{p}{q}$, अर्थात् अंश/हर के रूप में लिख सकते हैं। जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है (हर शून्य होने का अर्थ है कि वह संख्या अपरिभाषित हैं)। जैसे:— $\frac{4}{5}$, $-\frac{2}{6}$ आदि।

क्योंकि $q = 1$ हो सकता है अतः प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है। *e.g.* $2 = \frac{2}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ ।

दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ:—

उदा० 1:— 1 और 2 के बीच 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम 1 और 2 को परिमेय संख्या के रूप में लिखते हैं। अर्थात् $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$ । तत्पश्चात् हम दोनों संख्याओं के अंश व हर को 6(5\$1) से गुणा करते हैं।

$$\frac{1}{1} = \frac{1 \times 6}{1 \times 6} = \frac{6}{6}, \frac{2}{1} = \frac{2 \times 6}{1 \times 6} = \frac{12}{6}।$$

अतः 1 व 2 के बीच 5 परिमेय संख्या है : $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}$ ।

उदा० 2:— $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच 3 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ को समान हर वाली परिमेय संख्या के रूप में बदलते हैं।

∴ 2 और 3 का ल0स0प0 6 है, अतः $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ ।

तत्पश्चात् हम दोनों संख्याओं के अंश व हर को 4(3\$1) से गुणा करते हैं।

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 4}{6 \times 4} = \frac{12}{24}, \frac{2}{6} = \frac{2 \times 4}{6 \times 4} = \frac{8}{24}।$$

अतः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच 3 परिमेय संख्या है : $\frac{9}{24}, \frac{10}{24}, \frac{11}{24}$ ।

विभिन्न उदाहरणों द्वारा हम समझ सकते हैं कि हम दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं अतः हम कह सकते हैं कि दो परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

परिमेय संख्याओं के दशमलब प्रसार:-

परिमेय संख्याओं के दशमलब प्रसार दो तरह के होते हैं।

(1) सांत दशमलब:- जब कुछ चरणों के पश्चात शेष शून्य हो जाता है। तो ऐसे दशमलब प्रसार को सांत दशमलब कहते हैं। जैसे $\frac{3}{4} = 0.75, \frac{7}{8} = .875$

(2) अनवसानी आवर्ती:- जब कुछ चरणों के पश्चात शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है। तो ऐसे दशमलब प्रसार को अनवसानी आवर्ती कहते हैं। जैसे $\frac{1}{3} = 0.33333333 \dots$, यहाँ 3 की पुनरावृत्ति हो रही है, अतः हम इसे $0.\bar{3}$ के रूप में लिखते हैं।

अनवसानी आवर्ती संख्याओं को परिमेय संख्या के रूप में लिखना

उदा० 3:- $0.\bar{5}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$ है

$$\text{माना } x = 0.\bar{5} = 0.5555.. \quad \text{-----}(1)$$

क्योंकि यहाँ 1 अंक की पुनरावृत्ति हो रही है, अतः हम x को 10 से गुणा करते हैं।

$$10x = 5.5555.. \quad \text{-----}(2)$$

$$\underline{\hspace{1cm} x = 0.5555.. \quad \text{-----}(1) \quad \text{समी० (2) - (1)}} \hspace{1cm}$$

$$9x = 5.0000..$$

$$\text{अतः } x = \frac{5}{9}$$

उदा० 4:- $0.4\bar{18}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$

$$\text{माना } x = 0.4\bar{18} = 0.41818.. \quad \text{-----}(1)$$

क्योंकि यहाँ 2 अंक की पुनरावृत्ति हो रही है, अतः हम x को 100 से गुणा करते हैं।

$$100x = 41.8181.. \quad \text{-----}(2)$$

$$\underline{\hspace{1cm} x = 0.4181.. \quad \text{-----}(1) \quad \text{समी० (2) - (1)}} \hspace{1cm}$$

$$99x = 41.4000..$$

$$\text{अतः } x = \frac{41.4}{99} = \frac{414}{990} \quad |$$

जिन संख्याओं के दशमलब प्रसार असांत और अनवसानी अनावर्ती होते हैं, वे संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। *e.g.* $\sqrt{2}, 5, \pi, \dots, 1.23456658 \dots$ आदि।

(पूर्ण वर्ग संख्याओं को छोड़कर अन्य सभी संख्याओं के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं। जैसे $\sqrt{4} = 2$ एक परिमेय संख्या है।) तथा सभी परिमेय व अपरिमेय संख्याओं के संग्रह को वास्तविक संख्या कहते हैं।

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

- परिमेय व अपरिमेय संख्या का योग एवं अन्तर सदैव अपरिमेय होता है।
- परिमेय व अपरिमेय संख्या का गुणा एवं भाग सदैव अपरिमेय होता है।
- दो अपरिमेय संख्या का गुणन सदैव अपरिमेय नहीं होता है।

$$e.g. \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ अपरिमेय। } (\because \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab})$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2 \text{ परिमेय। } (\because \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a)$$

उदा० 5:- निम्न व्यंजको को सरल कीजिए:

$$(i) (2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{2}) \quad (ii) (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

$$(i) (2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{2}) = 2(3 - \sqrt{2}) + \sqrt{3}(3 - \sqrt{2}) \\ = 6 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$$(ii) (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \quad (\because (a + b)^2 = (a)^2 + (b)^2 + 2ab) \\ = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$$

हर का प्रमेयीकरण अर्थात् किसी अपरिमेय संख्या के हर को परिमेय संख्या में परिवर्तित करना, क्योंकि हर एक परिमेय संख्या होगी तो हम इसे सरलता से हल कर सकते हैं।

उदा० 6:- $\frac{1}{\sqrt{3}}$ के हर का प्रमेयीकरण कीजिए।

क्योंकि किसी भी वर्गमूल वाली संख्या का वर्ग करने पर या उस संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर वर्गमूल का चिन्ह हट जाता है अर्थात् $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ ।

अतः हम $\frac{1}{\sqrt{3}}$ के हर व अंश को $\sqrt{3}$ से गुणा करेंगे।

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

उदा० 7:- $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$ के हर का प्रमेयीकरण कीजिए।

$$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

अतः हम $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$ के हर व अंश को $\sqrt{7} + 1$ से गुणा करेंगे।

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-1} = \frac{1 \times (\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1) \times (\sqrt{7}+1)} = \frac{(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{7}+1}{7-1} =$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{6}$$

घातांक के नियम :-

➤ $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ a को आधार तथा m और n को घातांक कहते हैं।

$$e.g. \quad 3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$$

➤ $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $e.g. \quad 11^7 \div 11^4 = 11^{7-4} = 11^3$

➤ $(a^m)^n = a^{mn}$, $e.g. \quad (2^3)^{-5} = 2^{-15}$

➤ $a^m \times b^m = (ab)^m$, $e.g. \quad 2^2 \times 3^2 = (6)^2 = 36$

➤ $a^0 = 1$, $e.g. \quad 100^0 = 1$

उदा० 8:- ज्ञात कीजिए:

(i) $243^{2/5}$

(ii) $343^{-2/3}$

(iii) $2^{3/4} \times 2^{-2/3}$

(i) $243^{2/5} = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)^{2/5}$ सर्वप्रथम हम 243 के अभाज्य गुणखण्ड करेंगे।
 $= (3^5)^{2/5}$, संख्या 3, 5 बार आ रही है अतः इसे हम 3^5 के रूप में लिखें।
 $= 3^{5 \times 2/5} = 3^{10/5} = 3^2 = 9 \therefore (a^m)^n = a^{mn}$

(ii) $343^{-2/3} = (7 \times 7 \times 7)^{-2/3}$

$$= (7^3)^{-2/3}$$

$$= 7^{3 \times -2/3} = 7^{-6/3} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$$

(iii) $2^{3/4} \times 2^{-2/3}$

$$= 2^{\frac{3}{4} + (-\frac{2}{3})} = 2^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = 2^{\frac{9-8}{12}} = 2^{1/12}, \quad \because a^m \times a^n = a^{m+n},$$

प्रश्नावली

प्रश्न 1:— $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2:— $1.\bar{8}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

प्रश्न 3:— $1.3\bar{56}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

प्रश्न 4:— $1.\overline{001}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

प्रश्न 5:— .5 और .55 के बीच में दो अपरिमेय संख्या ज्ञात करें।

प्रश्न 6:— हर का प्रमेयीकरण कीजिए।

(i) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$

प्रश्न 7:— बताइये निम्न में से कौन सी संख्या परिमेय है और कौन सी अपरिमेय।

(i) $\sqrt{7}$ (ii) $(2 + \sqrt{3})$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 8:— निम्न व्यंजको को सरल कीजिए।

(i) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

(ii) $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$

प्रश्न 9:— ज्ञात कीजिए

(i) $343^{1/3}$

(ii) $256^{3/8}$

(iii) $512^{-2/9}$

प्रश्न 10:— ज्ञात कीजिए

(i) $3^{1/3} \times 3^{2/3}$

(ii) $7^{1/6} \div 7^{1/12}$