



कक्षा 10 पाठ-8 त्रिकोणमिति का परिचय(Introduction of Trigonometry)

त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के संबंधों का अध्ययन किया जाता है।

पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem)–

किसी समकोण त्रिभुज ABC में न्यूनकोण $\angle A$ के लिए उसके सामने की भुजा BC को लम्ब या ऊँचाई कहते हैं, $\angle A$ से लगी भुजा AB को आधार तथा तिरछी भुजा AC को कर्ण कहते हैं।

इसी प्रकार न्यूनकोण $\angle C$ के लिए उसके सामने की भुजा AB को लम्ब या ऊँचाई कहते हैं, $\angle C$ से लगी भुजा BC को आधार तथा तिरछी भुजा AC को कर्ण कहते हैं।

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, किसी समकोण त्रिभुज में

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

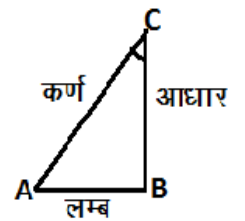
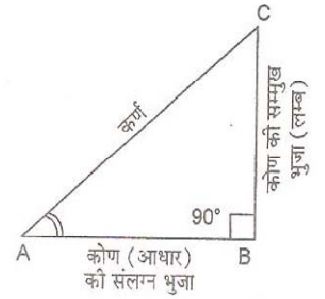
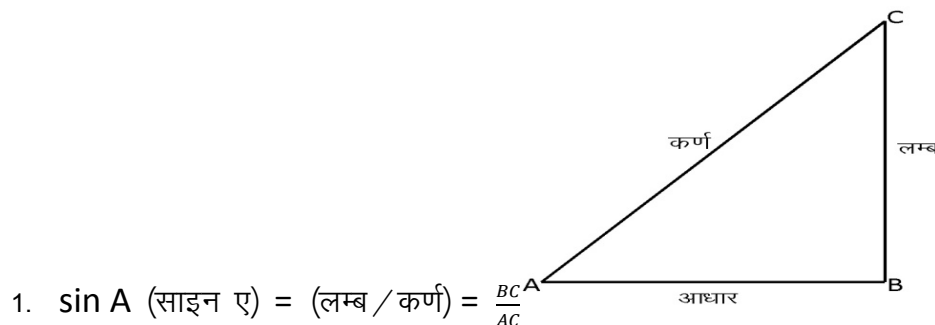
$$\text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$$

इस प्रमेय की सहायता से किसी समकोण त्रिभुज की दो भुजायें ज्ञात होने पर तीसरा भुजा को ज्ञात किया जा सकता है।

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios) –

एक समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के लिए भुजाओं के अनुपात को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं। ये छः प्रकार के होते हैं;

समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण तथा न्यूनकोण $\angle A$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं:–



2. $\cos A$ (कौस ए) = (आधार / कर्ण) = $\frac{AB}{AC}$
3. $\tan A$ (टैन ए) = (लम्ब / आधार) = $\frac{BC}{AB}$
4. $\operatorname{cosec} A$ (कौसेक ए) = $\frac{1}{\sin A}$ = (कर्ण / लम्ब) = $\frac{AC}{BC}$
5. $\sec A$ (सैक ए) = $\frac{1}{\cos A}$ = (कर्ण / आधार) = $\frac{AC}{AB}$
6. $\cot A$ (कौट ए) = $\frac{1}{\tan A}$ = (आधार / लम्ब) = $\frac{AB}{BC}$

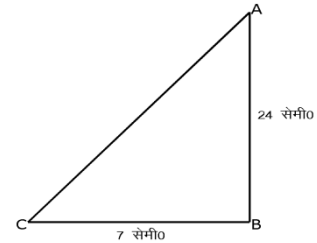
महत्वपूर्ण:

1. $\operatorname{cosec} A$, $\sin A$ का व $\sec A$, $\cos A$ का और $\cot A$, $\tan A$ का व्युत्क्रम (उल्टा) है।
2. $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$
3. $\sin A$, \sin और A का गुणनफल नहीं है बल्कि $\angle A$ के लिए \sin का मान है
4. \sin को sine का, \cos को cosine का, \tan को tangent का, cosec को cosecant का, \sec को secant का व \cot को cotangent का संक्षिप्त रूप कहा जाता है।

उदाहरण:-

1. त्रिभुज ABC में, जिसका $\angle B$ समकोण है तथा $AB = 24$ सेमी, $BC = 7$ सेमी है तो $\angle C$ के लिए समस्त त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो।

हल: सर्वप्रथम पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से त्रिभुज ABC का कर्ण ज्ञात करते हैं:



$\angle C$ के लिए, लम्ब = 24 सेमी व आधार = 7 सेमी

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(24^2 + 7^2)}$$

$$= \sqrt{(576 + 49)}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$= 25 \text{ सेमी}$$

$\angle C$ के लिए समस्त त्रिकोणमितीय अनुपात :-

$$\sin C = (\text{लम्ब} / \text{कर्ण}) = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\cos C = (\text{आधार} / \text{कर्ण}) = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

$$\tan C = (\text{लम्ब} / \text{आधार}) = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{7}$$

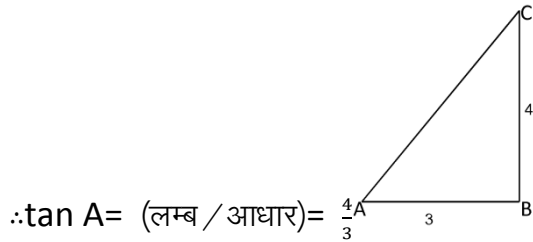
$$\operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C} = (\text{कर्ण} / \text{लम्ब}) = \frac{AC}{AB} = \frac{25}{24}$$

$$\sec C = \frac{1}{\cos C} = (\text{कर्ण} / \text{आधार}) = \frac{AC}{BC} = \frac{25}{7}$$

$$\cot C = \frac{1}{\tan C} = (\text{आधार} / \text{लम्ब}) = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{24}$$

2. यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ तो $\sin A$ व $\cos A$ का मान ज्ञात करो।

हल: $\tan A = (\text{लम्ब} / \text{आधार})$ और दिया है $\tan A = \frac{4}{3}$



\Rightarrow लम्ब = 4 व आधार = 3

पाइथागोरस प्रमेय से, कर्ण = $\sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$\therefore \sin A = (\text{लम्ब} / \text{कर्ण}) = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = (\text{आधार} / \text{कर्ण}) = \frac{3}{5}$$

कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios of Some Specific Angles) –

कुछ विशिष्ट कोणों 0° , 30° , 45° , 60° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान निम्नलिखित सारणी से प्राप्त किए जा सकते हैं:–

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

यदि $\angle A = 0^\circ$ तो $\sin A = \sin 0^\circ = 0$, $\cos A = \cos 0^\circ = 1$, $\tan A = \tan 0^\circ = 0$

यदि $\angle A = 30^\circ$ तो $\sin A = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

इसी प्रकार सभी कोणों के लिए अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान लिखे जा सकते हैं।

उदाहरण:—

1. $\sin 60^\circ \sec 30^\circ \tan 45^\circ$ का मान ज्ञात करो।

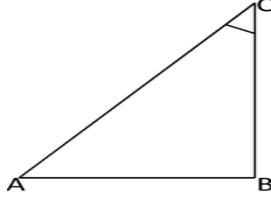
हल: $\sin 60^\circ \sec 30^\circ \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1 = 1$ (त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान रखने पर)

2. $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात करो।

हल: $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ = 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios of Complementary Angles) —

यदि दो कोणों का योग 90° है तो वे दोनों कोण एक दूसरे के पूरक कहलाते हैं।



समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका $\angle B$ समकोण है, $\angle A + \angle C = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle C = 90^\circ - \angle A$ अर्थात् $\angle A$ व $\angle C$ एक दूसरे के पूरक हैं।

$\angle A$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात:

$$\sin A = \frac{BC}{AC}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC}, \quad \tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC}, \quad \sec A = \frac{AC}{AB}, \quad \cot A = \frac{AB}{BC}$$

$\angle C = (90^\circ - \angle A)$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात:

$$\sin C = \sin(90^\circ - \angle A) = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos(90^\circ - \angle A) = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan C = \tan(90^\circ - \angle A) = \frac{AB}{BC}, \quad \operatorname{cosec} C = \operatorname{cosec}(90^\circ - \angle A) = \frac{AC}{AB}$$

$$\sec C = \sec(90^\circ - \angle A) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot C = \cot(90^\circ - \angle A) = \frac{BC}{AB}$$

$\angle A$ व $\angle C = (90^\circ - \angle A)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों की तुलना करने पर,

$$\sin(90^\circ - \angle A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - \angle A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - \angle A) = \cot A, \quad \cot(90^\circ - \angle A) = \tan A$$

$$\sec(90^\circ - \angle A) = \operatorname{cosec} A, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \angle A) = \sec A$$

उदाहरण:-

1. $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ का मान ज्ञात करो।

$$\text{हल: } \therefore 48^\circ = 90^\circ - 42^\circ$$

$$\cos 48^\circ = \cos(90^\circ - 42^\circ) = \sin 42^\circ \quad \{ \because \cos(90^\circ - \angle A) = \sin A \}$$

$$\therefore \cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \sin 42^\circ - \sin 42^\circ = 0$$

2. $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$ का मान ज्ञात करो।

$$\text{हल: } \therefore 26^\circ = 90^\circ - 64^\circ$$

$$\tan 26^\circ = \tan(90^\circ - 64^\circ) = \cot 64^\circ \quad \{ \because \tan(90^\circ - \angle A) = \cot A \}$$

$$\therefore \frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} = \frac{\cot 64^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometrical Identities)–

(परीक्षा के लिए महत्वपूर्ण)

मुख्यतः तीन सर्वसमिकाएँ हैं जिनका उपयोग प्रश्नों को हल करने में किया जाएगा–

सर्वसमिका 1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

या, $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ या, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

सर्वसमिका 2. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

या, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ या, $\sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

सर्वसमिका 3. $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

या, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ या, $\operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A$

उदाहरण:–

1. सिद्ध कीजिए : $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

हल: $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} \times \sqrt{\frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$ [अंश व हर को $\sqrt{1+\sin A}$ से गुणा करने पर]

$$= \sqrt{\frac{[1+\sin A]^2}{1-\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{[1+\sin A]^2}{\cos^2 A}} \{ \because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A \}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} = \sec A + \tan A$$

2. सिद्ध कीजिए : $\frac{1+\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{1+\cos A} = 2 \operatorname{cosec} A$

हल: $\frac{1+\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{[1+\cos A]^2 + \sin^2 A}{\sin A[1+\cos A]} = \frac{1+2\cos A + \cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A[1+\cos A]}$

$$= \frac{1+2\cos A+1}{\sin A[1+\cos A]} = \frac{2+2\cos A}{\sin A[1+\cos A]}$$

$$= \frac{2[1+\cos A]}{\sin A[1+\cos A]} = 2 \operatorname{cosec} A$$

अभ्यास प्रश्न:

1. बिना त्रिकोणमितीय सारणी का प्रयोग किए $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$ का मान ज्ञात करो। (2014)

2. सिद्ध कीजिए : $\frac{1+\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} = 2 \sec A$ (2014)

3. $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$ का मान ज्ञात करो। (2011)

4. सिद्ध कीजिए : $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ (2010)

5.