

हीरोन का सूत्र (कक्षा - 9)

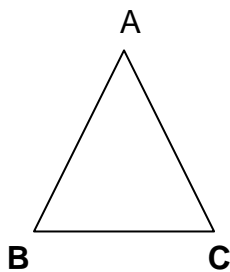
हीरोन के सूत्र का प्रयोग ऐसे \triangle का क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जाता है, जिसकी तीन भुजाएँ ज्ञात हो। अर्थात् जिसका मान हमें दिया गया हो।

इसके सूत्र को समझने या लिखने से पहले \triangle के विषय में कुछ जानकारी होना आवश्यक है।

तीन भुजाओं से घिरी आकृति को \triangle कहते हैं।

किसी \triangle में तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ, तीन कोण होते हैं।

उदाहरण- $\triangle ABC$ में



शीर्ष- A, B, C

कोण- $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ जिनके पूरे नाम $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ हैं।

(\angle चिन्ह कोण दिखाने के लिए प्रयुक्त होता है)

भुजाएँ- AB या BA

BC या CB

AC या CA

हम भुजाओं का नामकरण एक अन्य तरीके से भी कर सकते हैं जिसमें हम शीर्ष या कोणों के नाम का प्रयोग करेंगे। इसे इस प्रकार समझेंगे -

जैसे $\triangle ABC$ में शीर्ष A, B, व C हैं। तब हम प्रत्येक शीर्ष की सम्मुख भुजा देखेंगे जैसे

शीर्ष A की सम्मुख भुजा BC

शीर्ष B की सम्मुख भुजा AC

शीर्ष C की सम्मुख भुजा AB है।

अब इन भुजाओं का नाम शीर्षों के आधार पर निम्न तरीके से लिखेंगे—

शीर्ष A की सम्मुख भुजा BC का नाम – **a** (अंग्रेजी के small अक्षर)

शीर्ष B की सम्मुख भुजा AC का नाम – **b** (अंग्रेजी के small अक्षर)

शीर्ष C की सम्मुख भुजा AB का नाम – **c** (अंग्रेजी के small अक्षर)

अब भुजाओं को समझने के बाद हम हीरोन के सूत्र की ओर बढ़ेंगे –

हीरोन का सूत्र –

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

यहाँ पर **S** = Δ का अर्द्धपरिमाप

a, b, c = Δ की भुजाएँ जिसके बारे में हमने अभी तक समझा है।

अब अर्द्धपरिमाप को समझते हैं।

किसी भुजाओं वाली आकृति के परिमाप को ज्ञात करने के लिए सबसे सरल उपाय है कि उसकी भुजाओं का योग किया जाय उदाहरण के लिए—

वर्ग का परिमाप = चारों भुजाओं का योग = $a+a+a+a = 4a$

आयत का परिमाप = दोनों लम्बाई का योग + दोनों चौड़ाई का योग = $2l + 2b = 2(l + b)$

इसी प्रकार Δ का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग

अर्थात् Δ का परिमाप = $a+b+c$ क्योंकि **a, b, c** Δ की भुजाएँ हैं।

अब अर्द्धपरिमाप = परिमाप का आधा

$$= \frac{a+b+c}{2}$$

इस अर्द्धपरिमाप को **S** से दिखाएँगे

अब

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

यह अर्द्धपरिमाप का सूत्र है।

हीरोन के सूत्र का प्रयोग करने से पहले हम भुजाओं की सहायता से अर्द्ध परिमाप का मान निकालेंगे, फिर सूत्र में अर्द्धपरिमाप व भुजाओं का मान रखकर Δ का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे

उदाहरण के द्वारा समझने के लिये एक प्रश्न लेते हैं

प्र०- यदि किसी त्रिभुज की भुजाये 5, 10, 25 सेन्टीमीटर हो तो हीरोन के सूत्र की सहायता से क्षेत्रफल का मान ज्ञात करे ?

उ०- सर्वप्रथम हम Δ की भुजाओं को a, b, c द्वारा लिखेंगे

माना a= 5 सेन्टीमीटर, b= 10 सेन्टीमीटर, c= 25 सेन्टीमीटर

अब हम अर्द्धपरिमाप ज्ञान करेंगे

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$(a, b, c \text{ का मान रखेंगे}) S = \frac{5+10+25}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ सेन्टीमीटर}$$

अर्द्धपरिमाप 20 सेन्टीमीटर है

अब हम हीरोन का सूत्र लिखेंगे

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(s= 20 a= 5 b= 10 c= 15 रखेंगे)

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{20(20-5)(20-10)(20-15)}$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{(20 * 15 * 10 * 5)}$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{(2 * 2 * 5 * 5 * 3 * 5 * 2 * 5)} \text{ (20,15,10 के अभाज्य गुणखण्ड करेंगे)}$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{2 * 2 * 5 * 5 * 3 * 5 * 2 * 5}$$

$$= 2 \times 5 \times 5 \sqrt{3 * 2} \text{ (जोड़ों की संख्या से एक संख्या वर्गमूल के बाहर लिखी जायेगी)}$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = 50\sqrt{6} \text{ वर्ग सेन्टीमीटर क्षेत्रफल होगा।}$$

प्र०- यदि एक छाता 10 त्रिभुजाकार आकृति के दो अलग-अलग रंगों से बनी हो जिसके प्रत्येक भाग की माप 20 सेन्टीमीटर, 50 सेन्टीमीटर, 50 सेन्टीमीटर हो तो पूरी छाता के लिये अलग-अलग रंग के कितने कपड़े की आवश्यकता होगी ?

उ० छाते का प्रत्येक भाग त्रिभुजाकार है अतः हीरोन के सूत्र से



$$\text{एक भाग का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

यहाँ पर $a = 20$ सेन्टीमीटर, $b = 50$ सेन्टीमीटर, $c = 50$ सेन्टीमीटर

$$\text{अर्द्धपरिमाप } S = \frac{20+50+50}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ सेन्टीमीटर}$$

$$\begin{aligned} \text{एक भाग का क्षेत्रफल} &= \sqrt{60(60-50)(60-50)(60-20)} \\ &= \sqrt{60 * 10 * 10 * 40} \\ &= 200\sqrt{6} \text{ वर्ग सेन्टीमीटर} \end{aligned}$$

$$\text{एक रंग के 50 भागों का क्षेत्रफल} = 50 \times 200\sqrt{6} = 10000\sqrt{6} \text{ वर्ग सेन्टीमीटर}$$

एक रंग के $10000\sqrt{6}$ वर्ग सेन्टीमीटर कपड़े की आवश्यकता होगी ।

प्र०- यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 सेन्टीमीटर तथा प्रत्येक बराबर भुजा 12 सेन्टीमीटर हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

उ०- समद्विबाहु त्रिभुज में $a = b = 12$ सेन्टीमीटर

$$\text{अर्द्धपरिमाप } S = \frac{a+b+c}{2} \quad S = \frac{12+12+c}{2}$$

$$\text{पूर्ण परिमाप } 2xS = 12+12+c$$

$$\text{पूर्ण परिमाप} = 30 \text{ सेन्टीमीटर}$$

$$30 = 24 + c$$

$$c = 6 \text{ सेन्टीमीटर}$$

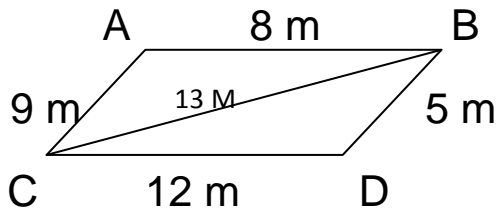
त्रिभुज की भुजाये $a= 12$ सेन्टीमीटर, $b= 12$ सेन्टीमीटर, $c= 6$ सेन्टीमीटर

$$\text{व अर्द्धपरिमाप } S = 30/2 = 15 \text{ सेन्टीमीटर}$$

$$\begin{aligned} \text{हीरोन का सूत्र} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)} \\ &= \sqrt{15 * 3 * 3 * 9} \\ &= \sqrt{(3 * 5 * 3 * 3 * 3 * 3)} \end{aligned}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = 9\sqrt{15} \text{ वर्ग सेन्टीमीटर}$$

प्र0- चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?



उ0-चतुर्भुज का क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए हमें इसे दो त्रिभुजों में विभाजित करना होगा

यहाँ पर दो त्रिभुज $\triangle ABD$ और $\triangle BCD$ है

अब हीरोन के सूत्र की सहायता से हम इनके क्षेत्रफल का मान ज्ञात करेंगे व इनके योग से चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त करेंगे।

$\triangle ABD$ में माना $a= 9$ मीटर, $b= 13$ मीटर, $c= 8$ मीटर

$$\text{अर्द्धपरिमाप } S = S = \frac{9+13+8}{2} = 30 / 2 = 15 \text{ सेन्टीमीटर}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \text{ ABD का क्षेत्रफल} &= \sqrt{15}(15 - 9)(15 - 13)(15 - 8) \\
&= \sqrt{(15 * 6 * 2 * 7)} \\
&= \sqrt{5 * 3 * 3 * 2 * 2 * 7)} \\
&= 6\sqrt{35} \text{ वर्ग मी} = 6 \times 5.9 = 35.4 \text{ वर्ग मी}
\end{aligned}$$

Δ BCD में माना $a= 12$ मीटर, $b= 5$ मीटर, $c= 13$ मीटर

$$\text{अर्द्धपरिमाप } S = \frac{12+5+13}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ सेन्टीमीटर}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \text{ BCD का क्षेत्रफल} &= \sqrt{15}(15 - 12)(15 - 5)(15 - 13) \\
&= \sqrt{(15 * 3 * 10 * 2)} \\
&= \sqrt{(5 * 3 * 3 * 5 * 2 * 2)} \\
&= 3 * 5 * 2 = 30 \text{ वर्ग मी}
\end{aligned}$$

$$\text{चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल} = 35.4 + 30 = 65.4 \text{ वर्ग मी}$$

कुछ महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. एक पार्क चतुर्भुज के ABCD के आकार का है। जहाँ $AB= 9\text{m}$ $BC= 12\text{m}$ $CD= 5\text{m}$ तथा $\angle C = 90^\circ$ $AD = 8\text{m}$ है। यह पार्क कितने क्षेत्रफल तक फैला है।

सर्वप्रथम ABCD में पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से **BD** का मान ज्ञात करेंगे। इसके बाद दो अलग-अलग त्रिभुजों ΔABD व ΔBDC का क्षेत्रफल हीरोन के सूत्र की सहायता से ज्ञात कर दोनों क्षेत्रफलों के योग से सम्पूर्ण पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात होगा।