

बहुपद

1) चर – ऐसी राशियाँ जिनका मान बदलता रहता है , चर राशियाँ कहलाती हैं । जैसे – x, y, z P, Q, R A, B, C आदि ।

2) अचर- ऐसी राशियाँ जिनका मान कभी नहीं बदलता, अचर राशियाँ कहलाती हैं । जैसे- $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ आदि ।

3) बीजीय व्यंजन – कुछ निश्चित चर तथा अचर राशियों के योग , अंतर , गुणन , भाग इत्यादि के संयोग से बने पद को बीजीय व्यंजन कहते हैं । जैसे $2X^2 - 3X + 1$, $2y + 1$, $3p$,

$5A + 6$

$3P \Rightarrow 3 \times P$

3 अचर राशि , P चर राशि , (x) गुणा की संक्रिया

4) बहुपद – ऐसे बीजीय व्यंजन को बहुपद कहते हैं जिसमें

1) चर राशि का घातांक एक घनात्मक पूर्णांक हो ।

2) प्रत्येक पद में चर राशि का गुणांक एक वास्तविक संख्या हो ।

3) पदों की संख्या निश्चित (सीमित) हो ।

जैसे – $x^2 + x^2 + 2x + 3$, $4x^2 - 5$ इत्यादि बहुपद हैं ।

परन्तु $x^2 - 1/x^2$ बहुपद नहीं हैं क्योंकि $1/x^2$ में चर x की घात -2 है जो घनात्मक नहीं है ।

प्रत्येक बिजिय व्यंजक बहुपद नहीं होता जबकि प्रत्येक बहुपद एक बिजिय व्यंजक

होता है ।

चर्चा प्रश्न - $\sqrt{2}x$, $1/4p$ व $1/x$ में कौन बहुपद है कौन बिजिय व्यंजक है?

बहुपद के प्रकार

एक पदी	द्विपदी	त्रिपदी	शून्य बहुपदी
केवल एक पद हो	केवल दो पद हो	केवल तीन पद हो	सभी पदों के गुणांक

$x^2, ax, 1/4x^4$	$x^2+5, 3p-6, ax+b$	x^2+5x+6	शुन्य हो [0]
-------------------	---------------------	------------	--------------

रैखिक बहुपद – चर की घात एक हो – $ax+b, x+5$

द्विघात बहुपद – चर की महत्तम घात 2 हो – x^2, ax^2+bx, p^2-8

त्रिघात बहुपद – चर की महत्तम घात 3 हो – x^3, x^3+x^2+1

बहुपद के शुन्यक किसी बहुपद में चर के स्थान पर किसी वास्तविक संख्या को प्रतिस्थापित करने पर यदि बहुपद का मान शुन्य आ जाये तो वह वास्तविक संख्या बहुपद का शुन्यक कहलाती है ।

मन कोई बहुपद $x+5$ है, इसे हम $p(x)=x+5$ के रूप में लिख सकते हैं , अब x का वह मान निकलना होगा जिसे बहुपद $p(x)$ में रखने पर $p(x)$ का मान 0 आजाये वह मान ही बहुपद का शुन्यक होगा

विधि 1- $p(x)$ में x के मान रखने पर $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ जिस मान पर $p(x)$ शुन्य आ जाये वह मान ही बहुपद का शुन्यक होगा

यथा $p(x) = x+5$

$$p(-5) = -5+5$$

$$= 0$$

अतः -5 बहुपद $p(x) = x+5$ का शुन्यक होगा ।

विधि 2- माना $p(x) = x+5$ का शुन्यक a है

तब $p(a)=0$ होना चाहिए

परन्तु $p(a)=a+5$

$$a+5=0$$

$$a= -5$$

अतः बहुपद $p(x)=x+5$ का शुन्यक -5 है

रैखिक बहुपद – केवल एक शुन्यक होता है

द्विघात बहुपद – दो शून्यक हो सकते हैं

त्रिघात बहुपद – तीन शून्यक हो सकते हैं

यह आवश्यक नहीं है कि कोई बहुपद जितने घात वाला हो उस बहुपद के उतने शून्यक भी हो

x^2+a या x^2+1 का कोई वास्तविक शून्यक नहीं है

*उपरोक्त जानकारी का अध्ययन कर कक्षा 09 गणित पाठ 2 बहुपद के अंतर्गत प्रश्नावली 2.1 , 2.2 हल की जा सकती है

यथा

- (i) $4x^2-3x+7$ एक चर में बहुपद है क्योंकि इसमें केवल एक चर x है जिसकी घात घनात्मक पूर्णांक है और चर x का गुणांक वास्तविक संख्या है ।
- (ii) $x^2 + x$ बहुपद द्विघातीय है क्योंकि चर की महत्तम घात 2 है ।
- (iii) $x - x^3$ बहुपद त्रिघातीय है क्योंकि चर x की महत्तम घात 3 है ।
- (iv) $p(y)=y^2- y+1$ का मान $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ पर ज्ञात कीजिए
- a) $p(0)=0^2-0+1$
- b) $p(1)=1-1+1$
 $1-1+1$
 $=0+1$
 $=1$
- c) $p(2)=2^2-2+1$
 $=4-2+1$
 $=2+1$
 $=3$
- v) बहुपद $p(x)=2x+5$ का शून्यक ज्ञात कीजिए
मान $p(x)=2x+5$ का शून्यक a है
तब $p(a)=0$ होना चाहिए
परन्तु $p(a)=2a+5$
 $2a+5=0=2a=-5$
 $a=-5/2$

अतः बहुपद $p(x)=2x+5$ का शून्यक $-5/2$ है ।

शेषफल प्रमेय

(4) भाज्य = (भाजक X भागफल)+ शेषफल

अंकगणित रूप में $15/6$

अर्थात्

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

भाज्य = (भाजक X भागफल)+ शेषफल

व्यापक रूप में यदि $p(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो बहुपद हो कि $p(x)$ की घात $\geq g(x)$ की घात और $g(x) \neq 0$ हो तो हम ऐसे बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे की

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

प्रमेय प्रश्न $x^4+x^3-2x^2+x+1$ को $x-1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

उ० यहाँ $p(x)=x^4+x^3-2x^2+x+1$ है

और $x-1$ का शून्यक 1 है

$$\text{अतः } p(1)=1^4 + 1^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$$

$$=1 + 1 - 2 + 1 + 1$$

$$=4 - 2$$

$$=2$$

अतः शेषफल प्रमेय के अनुसार $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल 2 प्राप्त होता है ।

गुणनखण्ड प्रमेय –

यदि $p(x)$ घात $x \geq 1$ वाला एक बहुपद हो और α कोई वास्तविक संख्या हो तो

(i) $(a)=0$ होता है यदि $(x-a)$, $p(x)$ का एक गुणखण्ड हो ।

यथा – गुणखंड प्रमेय लागू कर k बताये की प्रत्येक स्थिति में $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणखंड है या नहीं ?

$$a \quad p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = x + 1$$

गुणखंड प्रमेय से :

$$g(x) = x + 1$$

$x + 1$ ला शून्यक -1 है अतः

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$$

$$= -2 + 1 + 2 - 1$$

$$= -3 + 3$$

$$= 0$$

शेषफल शून्य है अतः $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणखंड होगा

* गुणखंड ज्ञात कीजिये

(i) $12x^2 - 7x + 1$

बहुपद द्विघात त्रिपद है अतः मध्यपद विखंडन से

$$= 12x^2 - 4x - 3x + 1$$

$$= 4x(3x-1) - 1(3x-1)$$

$$= (3x-1)(4x-1)$$

$$12 = \underline{2} \times \underline{2} \times 3$$

$$(a \times c = 12 \times 1)$$

2	12
2	6
3	3
	1

(4 व 3)

गुणनखंड ज्ञात कीजिये

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

यह महत्तम घात 3 वाला चारपदी बहुपद है। इस प्रकार के बहुपद का गुणनखंड ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम अचर पद के अपवर्तक ज्ञात करते हैं।

इस बहुपद में अचर पद 2 है अतः अचर पद 2 के

अपवर्तक ± 1 व ± 2 होंगे।

$$\text{माना } p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

अतः क्रमशः $p(1)$ $p(-1)$ $p(2)$ व $p(-2)$ ज्ञात करते हैं। x के जिस मान पर बहुपद का मान शून्यक

$$\text{यथा } p(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$$

$$= 1 - 2 - 1 + 2$$

$$= 3 - 3$$

$$= 0$$

अतः $(x - 1)$ बहुपद का एक गुणनखण्ड होगा।

$$x^2 - x - 2$$

$$x - 1 \quad x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$x^3 - x^2$$

$$(-) (+)$$

$$-x^2 - x + 2$$

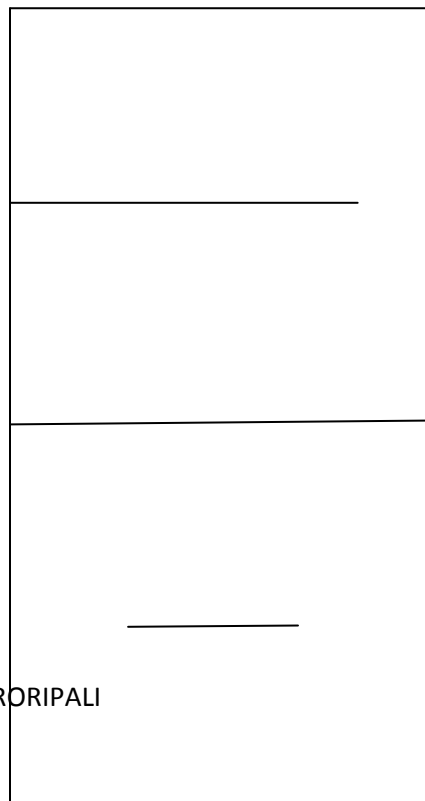
$$-x^2 + x$$

$$(+)(-)$$

$$-2x + 2$$

$$-2x + 2$$

$$(+)(-)$$



$$\text{अतः } x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2) \text{ [मध्यपद विखंडन]}$$

$$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$$

$$= (x - 1)[(x - 2)(x + 1)]$$

$$\text{अतः } x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

परीक्षा की दृष्टि से महत्वपूर्ण प्रश्न

.1. बहुपदों में कोन-कोन बहुपद रैखिक है , कोन-कोन द्विघाती है और कोन-कोन त्रिघाती है :

$$()^2 + \quad () - 3 \quad () 4^2 - 3 + 7 \quad () 3$$

.2. प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शुचक ज्ञात कीजिए :

$$() () = - 5 \quad () () = + : \neq 0$$

जहाँ v वास्तविक संख्याएँ हैं

.3. $3 - 2 + 6 -$ को $(-)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

.4. का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(-)$

1) $()$ का एक गुणनखण्ड हो :

$$() = 2^2 + + \sqrt{2}$$

$$() = 2^2 - 3 +$$

.5. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए:

$$() 6^2 + 5 - 6 \quad () 3^3 - 3^2 - 9 - 5$$

.6. निम्नलिखित का गुणनखण्ड कीजिए

$$() 27^3 + 125^3$$

$$() 27^3 + 3^3 + 2^3 - 9$$

उपयुक्त ढह सर्वसमिकाए प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (102)^3 &= (100 + 2)^3 \\ &= (A + B)^3 \\ &= A^3 + B^3 + 3AB(A + B) \quad [\text{सर्वसमिका vi}] \\ &= 100^3 + 2^3 + 3 \cdot 100 \cdot 2(100 + 2) \\ &= 1000000 + 8 + 600 + 102 \\ &= 1000000 + 8 + 61200 \end{aligned}$$

$$=1061208$$

महत्वपूर्ण प्रश्न

. यदि $++=0$ हो तो दिखाइये कि $^3+^3+^3 = 3$

उ० सर्वसमिका

$^3 + ^3 + ^3 - 3 = (+ +)(^2 + ^2 + ^2 - - -)$ में , , के स्थान पर क्रमशः , व रखने पर

$$^3 + ^3 + ^3 - 3 = (+ +)(^2 + ^2 + ^3 - - -)$$

$\therefore ++ = 0$ (दिया है)

$$\text{अतः } ^3 + ^3 + ^3 - 3 = (+ +)(^2 + ^2 + ^2 - - -)$$

$$^3 + ^3 + ^3 - 3 = 0 \quad (^2 + ^2 + ^2 - - -)$$

$$^3 + ^3 + ^3 - 3 = 0$$

$$^3 + ^3 + ^3 = 0 + 3$$

$$\boxed{^3 + ^3 + ^3 = 3}$$