

समान्तर श्रेणी

कक्षा:—10

ऐसी श्रेणी जिसका प्रत्येक पद (प्रथम पद को छोड़कर) अपने पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त की जाती है, समान्तर श्रेणी(Arithmetic Progression ; k A.P.) कहलाती है।

; ह निश्चित संख्या जिसे जोड़कर श्रेणी बनायी जाती है A.P. का सार्व अंतर (common difference) कहलाती है। यह सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

प्रत्येक A.P. के प्रारंभिक पद को a से तथा सार्व अंतर को d से प्रदर्शित करते है।

यदि हम समान्तर श्रेणी के पहले पद को a_1] दूसरे पद को a_2, \dots, n वें पद को a_n से प्रदर्शित करते है,तो

- प्रथम पद = a_1
- द्वितीय पद = a_2
- n वा पद = a_n

तब] A.P. a_1, a_2, a_3, \dots हो जाती है।

जहाँ सार्वान्तर $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$ है।

अगर हमें पहला पद दिया हो तो दूसरे पद ज्ञात करने के लिए उसमें सार्वान्तर d जोड़ते है और तृतीय पद ज्ञात करने के लिए दूसरे पद में सार्वान्तर d जोड़ते है। इस प्रकार

- प्रथम पद (a_1) = a
- द्वितीय पद (a_2) = $a+d$
- तृतीय पद (a_3) = $a+d+d = a+2d$
- चतुर्थ पद (a_4) = $a+d+d+d = a+3d \dots \dots \dots$

उदा०:— यदि प्रथम पद $a = 2$, सार्वान्तर $d = 5$, तो

$$a_1 = a = 2, a_2 = a + d = 2 + 5 = 7, a_3 = a + 2d = 2 + 10 = 12$$

अतः 2, 7, 12, A.P. है।

उदा० 1:— A.P के प्रथम 5 पद लिखिए, जबकि प्रथम पद a , सार्वान्तर d निम्न हैं।

(i) $a=3, d=-2$ (ii) $a=2, d=0$ (iii) $a=-1, d=-3$

(i) प्रथम पद $a=3, d=-2$

$$a_2 = a + d = 3 - 2 = 1, \quad a_3 = a + 2d = 3 - 4 = -1, \\ a_4 = a + 3d = 3 - 6 = -3, \quad a_5 = a + 4d = 3 - 8 = -5$$

(ii) $a=2, d=0$

$$a_2 = a + d = 2 + 0 = 2, \quad a_3 = a + 2d = 2 + 0 = 2, \\ a_4 = a + 3d = 2 + 0 = 2, \quad a_5 = a + 4d = 2 + 0 = 2$$

(iii) $a=-1, d=-3$

$$a_2 = a + d = -1 - 3 = -4, \quad a_3 = a + 2d = -1 - 6 = -7, \\ a_4 = a + 3d = -1 - 9 = -10, \quad a_5 = a + 4d = -1 - 12 = -13$$

उदा० 2:— निम्न में से कौन-कौन A.P हैं, यदि A.P तो इसका सार्वान्तर d तथा 3 और पद लिखिए।

(i) 1, 3, 9, 27.. (ii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots \dots \dots$ (iii) $-10, -6, -2, 2 \dots \dots$

(i) 1, 3, 9, 27

$$a_1=1, a_2=3, a_3=9, a_4=27$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2, a_3 - a_2 = 9 - 3 = 6$

क्योंकि दो क्रमागत पदों का अन्तर बराबर नहीं है, अतः दी गयी श्रेणी A.P नहीं है।

(ii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots \dots \dots$

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{8}, a_3 = \sqrt{18}, a_4 = \sqrt{32}$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर

$$a_2 - a_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{4} - 1) = \sqrt{2}(2 - 1) = \sqrt{2}$$

$$a_3 - a_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2}(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = \sqrt{2}(3 - 2) = \sqrt{2}$$

$$a_4 - a_3 = \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{16 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{2}(\sqrt{16} - \sqrt{9}) = \sqrt{2}(4 - 3) = \sqrt{2}$$

क्योंकि दो क्रमागत पदों का अन्तर बराबर है, अतः दी गयी श्रेणी A.P हैं। जहाँ $d = \sqrt{2}$

$$\therefore a_5 = a + 4d = \sqrt{2} + 4 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + 4) = 5\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$$

$$\therefore a_6 = a + 5d = \sqrt{2} + 5 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + 5) = 6\sqrt{2} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{72}$$

$$\therefore a_7 = a + 6d = \sqrt{2} + 6 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + 6) = 7\sqrt{2} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{98}$$

अतः A.P के अगले तीन पद, $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{98}$ ।

(iii) - 10, -6, -2, 2

$$a_1 = -10, a_2 = -6, a_3 = -2, a_4 = 2$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर $a_2 - a_1 = -6 - (-10) = -6 + 10 = 4$,

$$a_3 - a_2 = -2 - (-6) = -2 + 6 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

क्योंकि दो क्रमागत पदों का अन्तर बराबर है, अतः दी गयी श्रेणी A.P हैं। जहाँ $d = 4$

$$\therefore a_5 = a + 4d = -10 + 4 * 4 = -10 + 16 = 6$$

$$\therefore a_6 = a + 5d = -10 + 5 * 4 = -10 + 20 = 10$$

$$\therefore a_7 = a + 6d = -10 + 6 * 4 = -10 + 24 = 14$$

अतः A.P के अगले तीन पद, 6, 10, 14।

हम जिस पद का सूत्र निकालते हैं d का गुणांक सदैव उससे 1 कम होता है।

$$\text{दूसरा पद } a_2 = a + d = a + (2 - 1)$$

$$\text{तीसरा पद } a_3 = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$\text{चौथा पद } a_4 = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

.....

.....

इसी प्रकार n वा पद = ?

$$a_n = a + (n - 1)d$$

a_n को A.P. का व्यापक पद (general term) भी कहते हैं। n किसी A.P. में पदों की संख्या को निरूपित करता है। a और d ऋणात्मक, भिन्न, दशमलब संख्या हो सकती हैं परंतु n , क धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए। साथ ही श्रेणी के अन्तिम पद को a_n से प्रदर्शित करते हैं।

उदा० 3:- A.P. 7, 13, 19, ..., 205 में कितने पद हैं?

$$a = 7, d = 13 - 7 = 6, an = 205$$

A.P का n वा पद

$$an = a + (n - 1)d$$

$$205 = 7 + (n - 1)6$$

$$(n - 1)6 = 205 - 7 = 198$$

$$\therefore n - 1 = \frac{198}{6} = 33 \Rightarrow n = 33 + 1 = 34$$

अतः श्रेणी में कुल पद = 34

उदा० 4:- A.P.: 10, 7, 4, ..., dk 30ok in g%

$$a = 10, d = 7 - 10 = -3, n = 30$$

A.P का n वा पद

$$an = a + (n - 1)d$$

$$a_{30} = 10 + (30 - 1) - 3 = 10 + 29 \times -3$$

$$\therefore a_{30} = 10 - 87 = -77$$

अतः श्रेणी का 30 वा पद = -77

उदा० 5:-किसी A.P का तीसरा पद 14 है और छठा पद 24 है। 15 वा पद ज्ञात करें।

$$\text{तीसरा पद } a_3 = a + 2d = 14 \text{ ----- (1)}$$

$$\text{छठा पद } a_6 = a + 5d = 23 \text{ ----- (1)}$$

$$\text{समी (1) - (2)}$$

$$a + 2d - (a + 5d) = 14 - 23$$

$$2d - 5d = -9 \Rightarrow -3d = -9$$

$$\therefore d = -\frac{9}{-3} = 3$$

d का मान समी (1) में रखने पर

$$a + 2 \times 3 = 14 \Rightarrow a + 6 = 14$$

$$\therefore a = 14 - 6 = 8$$

$$\text{अतः } a_{15} = a + 14d = 8 + 14 \times 3 = 8 + 42 = 50$$

उदा० 6:-किसी A.P 18,15,12.... का कौन सा पद -87 है? क्या इस श्रेणी का कोई पद शून्य है? यदि हाँ तो कौन सा पद?

$$a = 18, d = 15 - 18 = -3,$$

माना A.P का n वा पद -87 है

$$\therefore an = -87$$

$$an = a + (n - 1)d$$

$$-87 = 18 + (n - 1) \times -3$$

$$(n - 1) \times -3 = -87 - 18 = -105$$

$$\therefore n - 1 = -\frac{105}{-3} = 35 \Rightarrow n = 35 + 1 = 36$$

अतः A.P का 30 वा पद -87 है

श्रेणी का कोई पद शून्य है जानने के लिए , हम n वे पद को शून्य मान लेते है

$$\text{माना A.P का } n \text{ वा पद } 0 \text{ है} \quad \therefore an = 0$$

$$\therefore an = a + (n - 1)d$$

$$0 = 18 + (n - 1) \times -3$$

$$(n - 1) \times -3 = 0 - 18 = -18$$

$$\therefore n - 1 = -\frac{18}{-3} = 6 \Rightarrow n = 6 + 1 = 7$$

अतः A.P का 7 वा पद शून्य है

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग

$$Sn = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$$; k \quad Sn = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1)d]$$

$$\text{वक्र-} \quad Sn = \frac{n}{2} [a + an] = \frac{n}{2} (\text{पहला पद} + \text{अंतिम पद})$$

(परिणाम का यह रूप उस स्थिति में उपयोगी है, जब A.P. का प्रथम और अंतिम पद ज्ञात हों तथा सार्व अंतर नहीं दिया गया हो।)

प्रथम n पदों के योग के सूत्र में, चार राशिया S, a, d और n हैं। यदि इनमें से कोई तीन राशियाँ ज्ञात हों, तो चौथी राशि ज्ञात की जा सकती है।

उदा० 7:- A.P. 8,15,22..... के प्रथम 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

यहाँ $a = 8, d = 15 - 8 = 7, n = 20$ है।

क्योंकि n पदों का योग $Sn = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$

$$Sn = \frac{20}{2} [2 \times 8 + (20 - 1)7] = 10[16 + 19 \times 7]$$

$$Sn = 10[16 + 133] = 10 \times 149 = 1490$$

अतः A.P.के प्रथम 20 पदों का योग= 1490

उदा० 8:- योगफल ज्ञात कीजिए $6 + 9 + 12 + \dots + 108$

यहाँ $a = 6, d = 9 - 6 = 3, an = 108$ है।

∴ A.P का n वा पद

$$an = a + (n - 1)d$$

$$108 = 6 + (n - 1)3$$

$$(n - 1)3 = 108 - 6 = 102$$

$$\therefore n - 1 = \frac{102}{3} = 34 \Rightarrow n = 34 + 1 = 35$$

अतः श्रेणी में कुल पद = 35

क्योंकि n पदों का योग $Sn = \frac{n}{2}[a + an]$

$$S_{35} = \frac{35}{2}[6 + 108] = \frac{35}{2}[114]$$

$$Sn = 35 \times 57 = 1995$$

अतः $6 + 9 + 12 + \dots + 108 = 1995$

उदा० 9:—यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 और प्रथम 20 पदों का योग 289 है तो इसके n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

माना A.P. का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है।

क्योंकि n पदों का योग $Sn = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

प्रथम 7 पदों का योग $S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7 - 1)d] = 49$

$$\frac{7}{2}[2a + 6d] = 49$$

$$\frac{7}{2}2[a + 3d] = 49 \Rightarrow 7[a + 3d] = 49$$

$$a + 3d = \frac{49}{7} = 7 \dots \dots \dots (1)$$

प्रथम 17 पदों का योग $S_{17} = \frac{17}{2}[2a + (17 - 1)d] = 289$

$$\frac{17}{2}[2a + 16d] = 289$$

$$\frac{17}{2}2[a + 8d] = 289 \Rightarrow 17[a + 8d] = 289$$

$$a + 8d = \frac{289}{17} = 17 \dots \dots \dots (2)$$

समी 0(2) - (1)

$$a + 8d - (a + 3d) = 17 - 7$$

M Pant G.I.C. Jhulaghat

$$8d - 3d = 10 \Rightarrow 5d = 10$$

$$\therefore d = \frac{10}{5} = 2$$

d का मान समी (1) में रखने पर

$$a + 3 \times 2 = 7 \Rightarrow a + 6 = 7$$

$$\therefore a = 7 - 6 = 1$$

प्रथम n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1)2] = \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2n] = n^2$$

अतः प्रथम n पदों का योग $= n^2$

किसी A.P. का n वाँ पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग के अंतर के बराबर होता है।

अर्थात् $\underline{a_n = S_n - S_{(n-1)}}$

जैसे किसी A.P के प्रथम 10 पदों का योग 125 है। और प्रथम 9 पदों के योग 98 है।

इसलिए A.P. का 10वाँ पद $a_{10} = S_{10} - S_{(10-1)} = S_{10} - S_9$

$$a_{10} = 125 - 98 = 27$$

इसी प्रकार, प्रथम n धन पूर्णाकों का योग सूत्र

$$S_n = 1+2+3+\dots+n, \quad a = 1, \quad a_n = n$$

bl fy, $S_n = \frac{n}{2}[a + a_n] = \frac{n}{2}[1 + n]$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

उदा० 10:—यदि किसी A.P. के प्रथम 100 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{100} = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2}$$

$$S_{100} = 50 \times 101 = 5050$$

अतः समान्तर श्रेणी के प्रथम 100 पदों का योग = 5050

प्रश्नावली

प्रश्न 1:— निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्व अंतर लिखिए %

(i) 3, 1, -1, -3, ... (ii) -5, -1, 3, 7, ... (iii) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, ...

प्रश्न 2:— A.P. . 2, 6, 10, 14, ... के 7वा, 8वा, 10 वा पद ज्ञात करें।

प्रश्न 3:— A.P. -4+3+10+... में कितने पद है।

प्रश्न 4:— 2 अंको वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं।

प्रश्न 5:— किसी A.P 21, 18, 15, ... का कौन सा पद -81 है? क्या इस श्रेणी का कोई पद शून्य है? यदि हाँ तो कौन सा पद?

प्रश्न 6:— किसी A.P. का 7 वा पद 32 और 13 वा पद 62 है। समान्तर श्रेणी ज्ञात करो।

प्रश्न 7:— सिद्ध कीजिए $a_n = 2n+6$ एक A.P. हैं।

प्रश्न 8:— A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

प्रश्न 9:— प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10:— 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11:— (i) $a = 2, d = 5, n = 10, S_n$ ज्ञात कीजिए।

(ii) $a = 5, a_n = 45, S_n = 400, n$ ज्ञात कीजिए।

(iii) $S_{14} = 1050, n = 14, a = 10, d$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12:— ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

प्रश्न 13:— $a_n = 3 + 4n$, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14:— A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।