

अनुक्रम तथा श्रेणी (Sequence and Series)

वृत्त— संख्याओं का वह समुच्चय जिसके अवयवों को किसी नियम के अन्तर्गत एक निश्चित क्रम में रखा गया हो, एक अनुक्रम (Sequence) कहलाता है।

उदाहरण—संख्याएँ 1,3,5,7,..... एक अनुक्रम बनाती है।

अनुक्रम का n वाँ पद $a_n=2n-1$, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। इसे अनुक्रम का व्यापक पद भी कहते हैं।

अनुक्रम के पदों को $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ से निरूपित करते हैं।

प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे पदांक कहते हैं, उसका स्थान बताती है।

अनुक्रम के प्रकार—अनुक्रम दो प्रकार के होते हैं।

1—परिमित अनुक्रम

2—अपरिमित अनुक्रम

परिमित अनुक्रम—वे अनुक्रम जिनमें पदों की संख्या सीमित होती है उसे परिमित अनुक्रम कहते हैं।

उदाहरण— जैसे संख्या 5,10,15,20,25

अपरिमित अनुक्रम—वे अनुक्रम जिनमें पदों की संख्या सीमित नहीं होती है, अपरिमित अनुक्रम कहलाते हैं।

उदाहरण—जैसे 2,4,6,8,.....

Fibonacci अनुक्रम—

यदि $a_1=a_2=1$

$$a_3=a_1+a_2$$

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}, \quad n>2$$

इस अनुक्रम को Fibonacci अनुक्रम कहते हैं।

Series—यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ अनुक्रम है, तो व्यंजक $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ संबंधित अनुक्रम से बनी श्रेणी कहलाती है।

श्रेणी परिमित अथवा अपरिमित होगी, यदि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित है।

श्रेणी $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ को संक्षेप रूप में $\sum_{k=1}^n a_k$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

उदाहरण—यदि $a_n=n(n+2)$, तो अनुक्रम के प्रथम तीन पद लिखिए।

$n=1, 2, 3$ रखने पर

$$a_1=1(1+2)=1.3=3$$

$$a_2=2(2+2)=2.4=8$$

$$a_3=3(3+2)=3.5=15$$

Arithmetic Progression— एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ को समांतर श्रेणी कहते हैं

यदि

$$a_{n+1}=a_n+d, \quad n \in \mathbb{N}$$

a_1 को प्रथम पद तथा अचर पद d को समांतर श्रेणी का सार्वअंतर कहते हैं।

समांतर श्रेणी जिसका प्रथम पद a , सार्वअंतर d है अर्थात्

$a, a+d, a+2d, \dots$

समांतर श्रेणी का n वाँ पद (व्यापक पद)

$$a_n = a + (n-1)d$$

। ekrj Js kh dh fo ks'krk, &

1-यदि समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अक्षर जोड़ा जाए, तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

2-यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में से एक अक्षर घटाया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

3-यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अक्षर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

4-यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अक्षर से भाग किया जाय तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक समांतर श्रेणी होगा।

। ekrj Js kh ds fy, । dr&

a = प्रथम पद

l = अंतिम पद

d = सार्वअंतर

n = पदों की संख्या

S_n = समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल

यदि $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ एक समांतर श्रेणी है तो

$$l = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

।। u—उस समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका k वाँ पद $5k+1$ है।

। ekrj ek/; $\frac{1}{4}$ **Arithmetic Mean**)—यदि दो प्रदत्त संख्याएं a तथा b के बीच एक संख्या A इस प्रकार है ताकि a, A, b समांतर श्रेणी में हो, तो संख्या A को a और b का समांतर माध्य कहते हैं।

a, A, b समांतर श्रेणी में है।

$$A - a = b - A$$

$$2A = a + b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

किन्ही दो संख्याओं a तथा b के बीच कितनी भी संख्याओं को रखकर समांतर श्रेणी A.P. में परिणित किया जा सकता है।

माना $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, a$ तथा b के मध्य संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $a, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, b$ समांतर श्रेणी में है।

अतः b ,समांतर श्रेणी का $(n + 2)$ वाँ पद होगा।

माना d =सार्वअंतर

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad b &= a + (n+2-1)d \\ b &= a + (n+1)d \\ b - a &= (n+1)d \\ d &= \frac{(b-a)}{n+1} \end{aligned}$$

a तथा b के मध्य n संख्याएँ निम्नवत् होंगी—

$$\begin{aligned} A_1 &= a + d = a + \frac{(b-a)}{n+1} \\ A_2 &= a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1} \\ A_3 &= a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1} \end{aligned}$$

.....
.....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

5 और 26 के बीच 5 संख्याएँ डालिए ताकि प्राप्त अनुक्रम समांतर श्रेणी बन जाए।
 3 तथा 19 के मध्य समांतर माध्य पद ज्ञात कीजिए।

Geometric Progression G.P.

किसी अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं ,यदि कोई पद पिछले पद से एक अचर अनुपात में बढ़ता है। इस अचर गुणांक को सार्वअनुपात कहते हैं।

अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ को गुणोत्तर श्रेणी कहा जाता है यदि प्रत्येक पद अशून्य हो तथा

$$a_{k+1}/a_k = r \text{ (अचर), } r \geq 1 \text{ के लिए।}$$

यदि $a_1 = a$ तो गुणोत्तर श्रेणी a, ar, ar^2, ar^3, \dots

जहाँ a प्रथम पद , r गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात कहते हैं।

General term of a G.P.

यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a , सार्व अनुपात r है तो

दूसरा पद $a_2 = ar = ar^{2-1}$

तीसरा पद $a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

चतुर्थ पद $a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

.....
.....

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद $a_n = ar^{n-1}$

गुणोत्तर श्रेणी $5/2, 5/4, 5/8, \dots$ का 20 वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

x के किस मान के लिए संख्याएँ $-2/7, x, -7/2$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

Sum to n terms of a G.P.

माना गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r है।

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad \text{---(1)}$$

यदि $r = 1$ तो

$$S_n = a + a + a + \dots + a \quad (\mathbf{n} \text{ पदों तक})$$

$$S_n = n \cdot a$$

यदि $r \neq 1$ तो समीकरण (1) को r से गुणा करने पर

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \quad \text{---(2)}$$

समीकरण (1) - (2)

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = a(1-r^n) / (1-r)$$

$$S_n = a(r^n - 1) / r - 1$$

Geometric Mean G.M.

दो धनात्मक संख्याओं a तथा b का गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$ यदि दो धनात्मक संख्याओं a तथा b दी गई हो तो उनके बीच इच्छित संख्याएँ रखी जा सकती है ताकि प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाएँ।

माना a तथा b के बीच n संख्याएँ $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ इस प्रकार हैं कि $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$ गुणोत्तर श्रेणी है।

अतः b गुणोत्तर श्रेणी का $(n + 2)$ वाँ पद होगा।

$$b = ar^{n+1}$$

या

$$r^{n+1} = b/a$$

$$r = (b/a)^{1/n+1}$$

अतः

$$G_1 = ar = a(b/a)^{1/n+1}$$

$$G_2 = ar^2 = a(b/a)^{2/n+1}$$

$$G_3 = ar^3 = a(b/a)^{3/n+1}$$

.. .. .

$$G_n = ar^n = a(b/a)^{n/n+1}$$

इसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाय।

Relationship between A.M. and G.M.)

माना A तथा G दी गई दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a तथा b के बीच क्रमशः समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य है। तो

$$A = \frac{a+b}{2}$$

$$G = \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$A - G = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$$A \geq G$$

$$A.M. \geq G.M.$$

Sum to n terms of special series

1-प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग-

$$S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2-प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग-

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3-प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग-

$$S_n = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

4- श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots$$

हल-माना श्रेणी के n पदों का योग S_n है तो -

$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \text{ पदों तक}$$

दी गई श्रेणी का n वॉ पद

$$= (1, 2, 3, 4, \dots \text{का } n \text{ वॉ पद}) \times (2, 3, 4, 5, \dots \text{का } n \text{ वॉ पद})$$

$$= (1+(n-1)1)(2+(n-1)1)$$

$$\text{श्रेणी का } n \text{ वॉ पद} = n(n+1)$$

$$S_n = \sum_{m=1}^n n(n+1)$$

$$S_n = \sum n^2 + \sum n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} \right)$$

$$S_n = \frac{2n(n+1)}{2} \left(\frac{n+2}{3} \right)$$

$$S_n = \frac{n(n+2)(n+2)}{3}$$

प्रश्न

- 1—यदि $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ तो प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए।
- 2—दो समांतर श्रेणियों के n पदों का अनुपात $5n+4:9n+6$ हो, तो उनके 18 वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- 3—उस गुणोत्तर श्रेणी का 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्व अनुपात 2 है।
- 4—श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए—

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots$$