lkjf.kd ¼**Determinants**½

nकोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह A=[aij] को एक संख्या द्वारा संबंधित करा सकते है जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते है।इसे $|A|$ या det(A) या Δ के द्वारा भी निरूपित किया जाता है।

यदि $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

तो A के सारणिक को $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ det (A) के द्वारा लिखा जाता है।

fVIi.kh&

1. आव्यूह A के लिए , $|A|$ को A का सारणिक पढ़ते है।
2. केवल वर्ग आव्यूह के सारणिक होते है।

,d dkfV d vk0;g dk lkjf.kd¼ Determinant of a matrix of order one ½&

एक कोटि का आव्यूह A=[a]

तो $|A|$=a

f}rh; dkfV d vk0;g dk lkjf.kd¼ Determinant of a matrix of order two ½&

माना 2×2 कोटि का आव्यूह $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

det (A)= $|A|=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$=a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$

उदाहरण– $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ = 2(-1) -4(-5)

= -2+20

=18

3×3dkfV d vk0;g dk lkjf.kd¼ Determinant of a matrix of order 3×3½&

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है।यह एक सारणिक का एक पंक्ति(या एक स्तंभ)के अनुदिश प्रसरण कहलाता है।तृतीय कोटि के सारणिक को छः प्रकार से प्रसारित किया जाता है। तीन पंक्तियों(R_1,R_2,R_3) में से प्रत्येक के संगत और तीन स्तंभ (C_1,C_2,C_3) में से प्रत्येक के संगत।

$A=[aij]_{3\times3}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A)= |A|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$|A|$= $a_{11}(a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}) - a_{12}(a_{21}.a_{33} - a_{31}.a_{23}) + a_{13}(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$

fVIi.kh&

1.गणना को सरल करने के लिए हम सारणिक का उस पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करेगें जिसमें शून्यों की संख्या अधिकतम होती है।

2.सारणिकों का प्रसरण करते समय $(-1)^{i+j}$ से गुणा करने के स्थान पर , (i+j) के सम या विषम होने के अनुसार +1 या -1से गुणा कर सकते है।

i! u&

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$ का मान ज्ञात कीजिए।

lkjf.kdk d: x.k/ke& सारणिकों के गुणधर्म का प्रयोग करके इनका प्रसरण (विस्तार)बहुत सुगमता से किया जा सकता है।ये गुणधर्म किसी भी कोटि के सारणिक के लिए सत्य है।

1–किसी सारणिक का मान इसकी पंक्तियों और स्तंभों के परस्पर परिवर्तित करने पर अपरिवर्तित रहता है

यदि R_i=iवीं पंक्ति और C_i=iवॉ स्तंभ है ,तो पंक्तियों और स्ंतभों के परस्पर परिवर्तन को $C_i \leftrightarrow R_i$ संकेतन से लिखा जाता है।

2.यदि एक सारणिक की कोई दो पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर परिवर्तित कर दिया जाता है ,तब सारणिक का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है

3.यदि एक सारणिक की कोई दो पक्तियां (अथवा स्तंभ)समान है (सभी संगत अवयव समान है)तो सारणिक का मान शून्य होता है।

4.यदि एक सारणिक के किसी एक पंक्ति (अथवा स्तंभ)के प्रत्येक अवयव को एक अचर k,से गुणा करते है तो उसका मान भी k से गुणित हो जाता है।

5.यदि एक सारणिक की एक पंक्ति या स्तंभ के कुछ या सभी अवयव दो (या अधिक)पदों के योगफल के रूप में व्यक्त हो तो सारणिक को दो (या अधिक) सारणिकों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण–

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6.यदि एक सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव में ,दूसरी पंक्ति या स्तंभ के संगत अवयवों के समान गुणजों को जोड़ दिया जाता है तो सारणिक का मान वही रहता है।
अर्थात् $R_i \rightarrow R_i + k\,R_j$ या $C_i \rightarrow C_i + k\,C_j$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

तो $R_1 \rightarrow R_1 + k\,R_3$ से $\begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & a_2 + kc_2 & a_3 + kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

f=Hkqt dk {k=Qy&

एक त्रिभुज जिसके शीर्ष बिंदु (X_1,Y_1) ,(X_2,Y_2) (X_3,Y_3) तथा हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल–

$$\Delta = 1/2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

uksV&

1–क्यों कि त्रिभुज का क्षेत्रफल एक धनात्मक राशि होती है। इसलिए सारणिक का निरपेक्ष मान लिया जाता है।
2–तीन संरेख बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

mi lkjf.kd vkSj lg[k.M&

mi lkjf.kd–सारणिक के अवयक a_{ij} का उपसारणिक एक सारणिक है जो iवी पंक्ति और jवॉ स्तम्भ जिसमें अवयव a_{ij} स्थित है ,को हटाने से प्राप्त होता है। अवयव a_{ij} के उपसारणिक को M_{ij} के द्वारा व्यक्त करते है।
lg[k.M–एक अवयव a_{ij} का सहखंड ,जिसे A_{ij} द्वारा व्यक्त करते है ,
जहॉ $A_{ij}=(-1)^{i+j}\,M_{ij}$

iz'u&

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

$a_{11=1}$ $M_{11=}$ a_{11} का उप सारणिक$_=$3 $A_{11}=(-1)^{1+1}.\,M_{11}=(-1)^2.3=3$
इसी प्रकार $M_{12=}$ 4 $A_{12}=(-1)^{1+2}.\,M_{12}=(-1)^3.4=-4$
$M_{21=}$-2 $A_{21}=(-1)^{2+1}.\,(-2)=(-1)(-2)=2$

M_{22}= 1 $\qquad\qquad$ $A_{22}=(-1)^{2+2}.(1)=(1)(1)=1$

<u>vk0;g d lg[kMt vkj 0;RØe&</u>

एक वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ का सहखंडज ,आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप में परिभाषित है। जहॉ , A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखंड है जिसे adj A के द्वारा व्यक्त करते है।

यदि

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

adj A= $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ का परिवर्त

$$\text{adj } A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

1.यदि A कोई n कोटि का आव्यूह है तो A(adjA)=(adjA)A=$|A|I$
जहॉ I,n कोटि का तत्समक आव्यूह है।

2.एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय (singular) कहलाता है यदि $|A|=0$ है।

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ का सारणिक शून्य है। $\qquad$ A अव्युत्क्रमणीय है।

3.एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय (non-singular) कहलाता है यदि$|A|\neq 0$
उदाहरण–

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$=4-6=-2$\neq 0$

A व्युत्क्रमणीय है।

4.एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है,यदि और केवल यदि A व्युत्क्रणीय आव्यूह है।

$$A^{-1}=\frac{\text{adjA}}{|A|}$$

i! u&;fn

A=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,   तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

vk0;g dk 0;qRØe }kjk jSf[kd lehdj.kksa dk fudk; dk gy&

रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह समीकरण के रूप में व्यक्त करते है और आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग करके उसे हल किया जाता है।

समीकरण निकाय

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

यदि

A=$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ X=$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

समीकरण निकाय A X= B के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

1.यदि एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है,तब इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है

A X= B से

$A^{-1}(A X)=A^{-1} B$ (A^{-1} से पूर्व गुणन के द्वारा)

$(A^{-1}A) X=A^{-1} B$ (साहचर्य गुणन के द्वारा)

IX= A^{-1} B

X= A^{-1} B

यह आव्यूह समीकरण दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल प्रदान करता है।

2.यदि Aएक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $|A|=0$

तो (adjA)B ज्ञात करेंगें।

यदि

(adjA)B $\neq 0$,(0 शून्य आव्यूह)

तब कोई हल नही होता है और समीकरण निकाय असंगत कहलाती है।

यदि (adjA)B $= 0$,तब निकाय संगत या असंगत होगी क्यों कि निकाय के अनंत हल होंगें या कोई भी हल नही होगा।

mnkgj.k&समीकरण निकाय

$$5x+2y=4$$
$$7x+3y=5$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

A X= B के रूप में लिखने पर

A=$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$|A|= \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$=5.3-7.2=15-14=1$\neq 0$

आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है तथा A^{-1} का अस्तित्व है।

$A_{11}=3$ $\quad A_{12=-7}$ $\quad A_{21=-2}$ $\quad A_{22=5}$

adj A=$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$का परिवर्त

adj A=$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$का परिवर्त

adj A=$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}$$

$$=1/1\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

A X= B

X= A^{-1} B

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 + (-2).5 \\ -7.4 + 5.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

अतः

x= 2

y= -3

Ik ukoyh

1.सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

2.सारणिकों के गुणधर्म का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए–

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

3.यदि त्रिभुज के शीर्ष बिंदु (1,0),(6,0),(4,3)हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4.सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड लिखिए।

5.आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

6.समीकरण निकाय

2x+3y+3z=5

x-2y+z=-4

3x-y-2z=3 को आव्यूह विधि से हल कीजिए।