सीमा और अवकलन

माना $y = f(x)$, चर x का कोई फलन है।

परिभाषित फलन - $x = a$ पर फलन $f(x)$ परिभाषित कहलाता है, यदि $x = a$ पर फलन का मान $f(a)$ एक निश्चित एवं परिमित राशि के बराबर हो।

Ex.- $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

तब $x = 2$ पर $f(2) = 3(2)^2 + 2(2) + 1$

$= 12 + 4 + 1$

$= 17$ निश्चित राशि

अतः दिया गया फलन $x = 2$ पर परिभाषित है।

अपरिभाषित फलन - $x = a$ पर फलन $f(x)$ अपरिभाषित कहलाता है, यदि $x = a$ पर फलन का मान $f(a)$ एक अनिश्चित एवं अपरिमित राशि के बराबर हो।

Ex - $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2}$$

$$= \frac{4 - 4}{2 - 2}$$

$$= \frac{0}{0}$$ अनिश्चित राशि

अतः $x = 2$ पर दिया गया फलन अपरिभाषित है।

> $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \times \infty, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$
> के रूप की प्रत्येक राशि को अनिश्चित राशि माना गया है।

फलन की सीमा की अभिधारणा - जब x के किसी निश्चित मान (माना $x = a$) के लिए फलन $f(x)$ का मान $f(a)$ किसी अनिश्चित राशि के बराबर प्राप्त होता है तो $f(x)$ का वह सीमान्त मान ज्ञात कर लेते हैं जो उसके वास्तविक मान के अत्यन्त निकट हो। इस सीमान्त मान को ही फलन $f(x)$ की सीमा कहते हैं।

Ex.- $F(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

फलन में $x = 1$ रखने पर $F(1) = \frac{(1)^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ जो कि अर्थहीन है।

तब $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1$

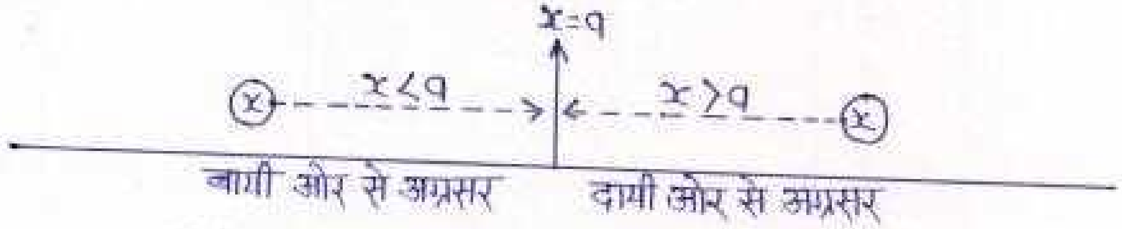
x के 1 से भिन्न मानो के लिए फलन $x+1$ के समतुल्य होगा।

अब यदि x का मान 1 न लेकर 1 से थोड़ा अधिक ले तो स्पष्ट है कि फलन का मान $x+1$ के बराबर होगा।

इसी प्रकार जब x का मान 1 से कम रखते हुए धीरे-2 1 के समीप लाते है तो फलन का मान भी $x+1$ के समीप आता है।

अतः स्वतंत्र चर x का मान दिये हुए मान $x = a$ की ओर अग्रसर होने पर $f(x)$ का मान जिस निश्चित राशि की ओर अग्रसर होता है, वह ... की सीमा कहलाती है।

फलन की सीमा - स्वतन्त्र चर x का मान दाऐं अथवा बाऐं से दिये हुए मान $x=a$ की ओर अग्रसर होकर जैसे-जैसे इसके निकट आता है, वैसे-वैसे फलन $f(x)$ का मान एक निश्चित राशि L की ओर अग्रसर होता है, तब यह निश्चित राशि L फलन की सीमा कहलाती है।



सांकेतिक भाषा में फलन $f(x)$ की सीमा को निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है -

$\underset{x \text{ Tends to } a}{\text{Limit}} f(x) = L$ OR $\underset{x\to a}{\text{Limit}} f(x) = L$ OR $\lim_{x\to a} f(x) = L$

नोट - $x=a$ की ओर अग्रसर होकर x का मान इसके इतने अधिक निकट पहुंच जाता है कि $|x-a|$ तथा $|f(x)-L|$ अत्यन्त अल्प राशियां है।

दाऐं सीमा - x के दायी ओर से $x=a$ की ओर अग्रसर होने पर $f(x)$ का मान संख्या L_1 की ओर अग्रसर होता है।

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad OR \quad f(a+0) = L_1$$

विधि - इस दशा में x जो भी मान ग्रहण करता है वे सभी a से बड़े होंगे, $x>a$

माना $x=a+h$ जहाँ h एक अल्प राशि है।

अतः दाऐं सीमा ज्ञात करने के लिए $f(x)$ में x के स्थान पर $(a+h)$ रख देते हैं जबकि $h\to 0$ यदि $a\to 0$

$$\text{दायी सीमा} = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

बायी सीमा - x के बायी ओर से $x=a$ की ओर अग्रसर होने पर $f(x)$ का मान संख्या L_2 की ओर अग्रसर होता है।

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \quad OR \quad f(a-0) = L_2$$

विधि - इस दशा में x जो भी मान ग्रहण करता है वे सभी a से छोटे होंगे।
$x<a$

माना $x=a-h$, जहाँ h एक अल्प राशि है।

अतः बायी सीमा ज्ञात करने के लिए $f(x)$ में x के स्थान पर $(a-h)$ रख देते हैं,

जबकि $h\to 0$ यदि $x\to a$

$$\text{बायी सीमा} = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad OR \quad \lim_{h\to h} f(a-h)$$

फलन की सीमा का अस्तित्व - यदि $x \to a$, तब फलन $f(x)$ की सीमा (Limit) का अस्तित्व केवल तभी होगा, जब

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

अर्थात दायीं सीमा = बायीं सीमा

सीमा सम्बन्धी मुख्य नियम -

* प्रत्येक फलन की केवल एक सीमा होती है।
* यदि $f(x) = k$, जहाँ k कोई अचर है, तब $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (k) = k$
* $\lim_{x \to a} [f(x) + k] = \lim_{x \to a} f(x) + k$
* $\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$
* $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] + \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$
* $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] - \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$
* $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$
* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

कुछ महत्वपूर्ण सीमाएं -

* $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$
* $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
* $\lim_{x \to 0} \tan x = 0$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ OR $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ OR $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
* $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$
* $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

कुछ महत्वपूर्ण विस्तार -

1- $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2 x^{n-2}a^2 + \cdots + a^n$

2- $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$

3- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

4- $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

5- $a^x = 1 + x(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \cdots$

6- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

7- $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$

8- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

9- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

10- $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

फलन की सीमा ज्ञात करने के नियम -

1→ यदि $x=a$ रखने पर फलन का मान एक निश्चित राशि के बराबर प्राप्त होता है तो वह निश्चित राशि ही अभीष्ट सीमा होगी।

जैसे- $\lim_{x\to1}(x^3+2x^2+1) = [1^3+2(1)^2+1] = [1+2+1] = 4$

2→ यदि फलन एक ऐसी भिन्न के रूप मे हो जिसमें $x=a$ रखने पर अंश तथा हर दोनो ही शून्य के बराबर हो जाते है अर्थात $\frac{0}{0}$ का रूप प्राप्त होता है, तो अंश और हर के गुणनखण्ड करके सरल करते है और उसके बाद $x=a$ रख देते है।

जैसे- $\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

$= \lim_{x\to1}(x+1) = 1+1 = 2$

3→ यदि फलन में ऐसे पद उपस्थित है, जिनका प्रसार किया जा सकता है, तो इनका प्रसार करके सरलतम रूप मे रखकर तथा अंश व हर मे उभयनिष्ठ गुणनखण्डो को निरस्त करके $x=a$ रखने पर फलन की सीमा ज्ञात की जा सकती है।

जैसे- $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right]-1}{x}$ (e^x का प्रसार करने पर)

$\lim_{x\to0}\frac{x\left[1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right]}{x}$

$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right] = 1$

4→ यदि $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ज्ञात करनी है तथा $f(x)$ एक बीजीय भिन्न के रूप में हो तो सीमा ज्ञात करने के लिए अंश व हर में x की उच्चतम घात से भाग करके x के स्थान पर अनन्त रखते है। अर्थात $x=\frac{1}{y}$ रखते है, तब $y=\frac{1}{x}$

जब $x\to\infty$ तब $y\to0$

उदाहरण -

प्रश्न 1- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{6}}-1}$

हल - $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{6}}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2-(1)^2}{x^{\frac{1}{6}}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^{\frac{1}{6}}+1)(x^{\frac{1}{6}}-1)}{(x^{\frac{1}{6}}-1)}$

$\lim\limits_{x\to 1} (x^{\frac{1}{6}}+1) = (1)^{\frac{1}{6}}+1 = 1+1 = 2$

प्रश्न 2- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $(a, b \neq 0)$

हल - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax \cdot \frac{\sin ax}{ax}}{bx \cdot \frac{\sin bx}{bx}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a}{b} \dfrac{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)}{\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)}$

$= \dfrac{a}{b} \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin bx}{bx}} = \dfrac{a}{b} \dfrac{\lim\limits_{ax\to 0} \frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{bx\to 0} \frac{\sin bx}{bx}}$ $\quad x\to 0 \Rightarrow ax \to 0$ तथा $bx \to 0$

$= \dfrac{a}{b} \left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{a}{b}$

प्रश्न 3- $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $F(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 1 \\ -x^2-1, & x > 1 \end{cases}$

हल - $F(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 1 \\ -x^2-1, & x > 1 \end{cases}$

$x = 1$ पर फलन की दक्षिण पक्ष की सीमा तथा वाम पक्ष की सीमा ज्ञात करने पर

R.H.L. $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} -x^2-1 = -(1)^2-1 = -1-1 = -2$

L.H.L. $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2-1 = (1)^2-1 = 1-1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$

अतः $x=1$ पर $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$ का कोई अस्तित्व नहीं है।

प्रश्नावली

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} (\text{Cosec}\, x - \text{Cot}\, x)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$

अवकलज

माना $y = f(x)$ चर x का कोई सतत फलन है, जहाँ x स्वतन्त्र चर तथा y परतन्त्र चर है।

फलन $f(x)$ का अवकलन एक ऐसी प्रक्रिया है जिसके द्वारा एक ऐसा फलन ज्ञात करते है जो स्वतंत्र चर x मे हुए परिवर्तन के सापेक्ष, परतन्त्र चर y मे हुए 'परिवर्तन की दर' को बताता है।

इस प्रकार जो नया फलन प्राप्त होता है वह मौलिक फलन $f(x)$ का अवकल गुणांक अथवा अवकलज कहलाता है।

फलन का अवकल-गुणांक अथवा अवकलज ज्ञात करना -

माना $y = f(x)$ चर x का कोई सतत फलन है।

माना x के मान मे अल्प वृद्धि होने पर y के मान मे हुई संगत वृद्धि δy है।

$$y + \delta y = f(x + \delta x)$$

$$(y + \delta y) - y = f(x + \delta x) - f(x)$$

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

यदि $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ का मान एक निश्चित राशि के बराबर हो तो इसे x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक अथवा अवकलज कहते है। जिसे $\frac{dy}{dx}$ से प्रदर्शित करते है।

फलन का अवकल गुणांक या अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन कहते है।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ इसे प्रथम सिद्धान्त से प्राप्त अवकलज कहते है।

फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक निम्न प्रतीकों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है -

$\frac{dy}{dx}$ या $\frac{d}{dx} f(x)$ या $f'(x)$ या y_1 या Dy

* किसी फलन का अवकलन केवल उसी चर राशि के सापेक्ष किया जाता है जिसका कि वह फलन होगा।

$\frac{dy}{dx}$ का अर्थ है $\frac{d}{dx}(y)$ जबकि $\frac{d}{dx}$ को अवकलन संकारक कहते है।

अतः x के फलन का अवकलन करने पर फलन से पहले संकारक $\frac{d}{dx}$ लगा देते हैं।

$\frac{dy}{dx}$ का अर्थ, dy का dx से भाग है मानना गलत है अर्थात $\frac{dy}{dx} \neq dy \div dx$

कुछ विशेष फलनो के अवकलज -

(i) $\frac{d}{dx}(\text{अचर}) = 0$, (ii) $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$, (iii) $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$, (iv) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

(v) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$, (vi) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

त्रिकोणमितीय फलनो के अवकलज -

(i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, (ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$, (iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

फलनों के अवकलज का बीजगणित -

(i) दो फलनों के योग का अवकलज, उन फलनों के अवकलजों का योगफल होता है।

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज, उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है।

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणनफल का अवकलज -

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

OR $\frac{d}{dx}$[पहला फलन x दूसरा फलन] = पहला फलन x $\frac{d}{dx}$(दूसरा फलन) + दूसरा फलन x $\frac{d}{dx}$(पहला फलन)

$$\frac{d}{dx}[C\cdot f(x)] = C\frac{d}{dx}f(x)$$

OR $\frac{d}{dx}$(अचर x फलन) = अचर $\frac{d}{dx}$(फलन)

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज -

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

OR $\frac{d}{dx}\left[\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\right] = \frac{\text{हर} \times \frac{d}{dx}(\text{अंश}) - \text{अंश} \times \frac{d}{dx}(\text{हर})}{(\text{हर})^2}$

उदाहरण - $\sin x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए

हल - माना $y=\sin x$

y का अवकलज $\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]$$

$$= \cos(x+0)\cdot 1$$

$$= \cos x$$

उदाहरण - $F(x) = x^2$ का प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल - माना $y = F(x) = x^2$

$y = F(x)$ का अवकलन $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}F(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= 2x$$

OR $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}x^2 \quad \left[\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right]$

$$= 2x^{2-1}$$

$$= 2x$$

सूत्र के द्वारा अवकलन ज्ञात किया गया है।

उदाहरण - किसी अचर a के लिए $\frac{x^n - a^n}{x-a}$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल - $F(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a}$

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{(x-a)\frac{d}{dx}(x^n - a^n) - (x^n - a^n)\frac{d}{dx}(x-a)}{(x-a)^2}$$ (फलन भिन्न में है तो भिन्न का सूत्र लगायेंगे)

$$= \frac{(x-a)(nx^{n-1} - 0) - (x^n - a^n)(1-0)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{n(x-a)x^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^n - nax^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$$

उदाहरण - $F(x) = \sin x \cos x$ फलन दो फलनों का गुणनफल है।

इसमें दो फलनों के गुणनफल वाले फलन के अवकलन का सूत्र लगेगा।

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

$$= \sin x \frac{d}{dx}\cos x + \cos x \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x)$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos 2x$$

प्रश्नावली

प्रश्न 1 → प्रथम सिद्धान्त से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\tan x$ (ii) $x^3 - 27$

प्रश्न 2 → xe^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3 → $5\sin x - 6\cos x + 7$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4 → $\frac{ax+b}{cx+d}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5 → $x = 1$ पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला - 1 (i) $\sec^2 x$, (ii) $3x^2$, 2 → $e^x(x+1)$, 3 → $5\cos x + 6\sin x$

4 → $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, 5 → 1