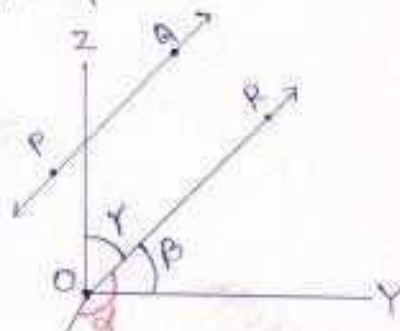


## त्रि-विमीय ज्यामिति

**रेखा के दिक्-कोसाइन** - माना रूब रेखा PQ अंतरिक्ष में है। PQ के समान्तर रूब रेखा मूल बिन्दु O से होते हुए OR खींची गई है।

यदि OR अक्ष OX, OY तथा OZ के साथ  $\alpha, \beta, \gamma$  कोण बनाती है, तो  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  को रेखा PQ के दिक्-कोसाइन कहते हैं। इन्हें क्रमशः  $l, m, n$  से प्रदर्शित करते हैं।



\* यदि PQ की दिशा OR की दिशा के विपरीत हो तो PQ के दिक्-कोसाइन  $\cos(\pi - \alpha), \cos(\pi - \beta)$  तथा  $\cos(\pi - \gamma)$  OR  $-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma$  होंगे।

**रेखा के दिक्-अनुपात** - वे संख्याएँ जो दिक्-कोसाइन के समानुपाती हैं कि अनुपात कहलाती हैं। माना  $a, b$  तथा  $c$  दिक्-कोसाइन  $l, m$  तथा  $n$  के समानुपाती हैं तो  $a, b, c$  रेखा के दिक्-अनुपात कहलायेंगे।

$$a \propto l \Rightarrow a = lr$$

$$b \propto m \Rightarrow b = mr$$

$$c \propto n \Rightarrow c = nr$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2(l^2 + m^2 + n^2) \quad [\because l^2 + m^2 + n^2 = 1]$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\therefore l = a/r, m = b/r, n = c/r$$

$$\text{अतः } l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**रेखा के दिक्-कोसाइन में सम्बन्ध** -

माना PQ के दिक्-कोसाइन  $l, m, n$  हैं। PQ के समान्तर OR रेखा खींची गई है जो OX, OY, OZ के साथ  $\alpha, \beta, \gamma$  कोण बनाती है। चूँकि R इस पर कोई बिन्दु है जिसके निर्देशांक  $(x, y, z)$  हैं।

R में OY पर रूब लम्ब RM खींचा गया।

$$\cos \beta = \frac{OM}{OR} \Rightarrow m = \frac{y}{r} \Rightarrow y = mr$$

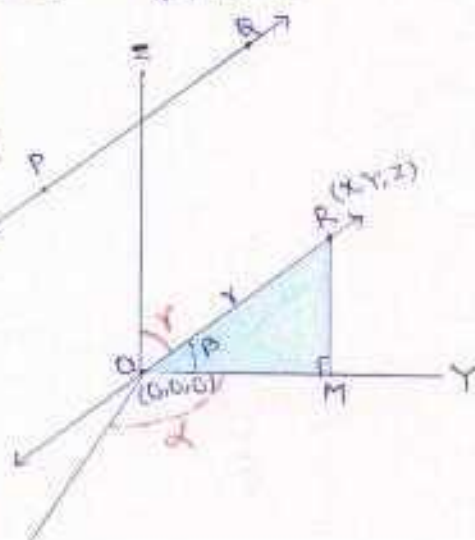
$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow l = \frac{x}{r} \Rightarrow x = lr$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow n = \frac{z}{r} \Rightarrow z = nr$$

$$OR^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r^2 = m^2 r^2 + l^2 r^2 + n^2 r^2$$

$$r^2 = r^2(l^2 + m^2 + n^2)$$



### दो बिन्दुओं के मिलाने वाले रेखा के दिक्-कोसाइन -

दो दिग्गोण बिन्दु  $P(x_1, y_1, z_1)$  और  $Q(x_2, y_2, z_2)$  के दिक्-कोसाइन  $l, m, n$  हैं और यह  $X, Y$  और  $Z$ -अक्ष के साथ  $\alpha, \beta, \gamma$  कोण बनाती है।

समकोण  $\triangle PNR$  में

$$\cos \alpha = \frac{PN}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{PR}$$

$$\text{इसी } \cos \beta = \frac{x_2 - x_1}{PR}$$

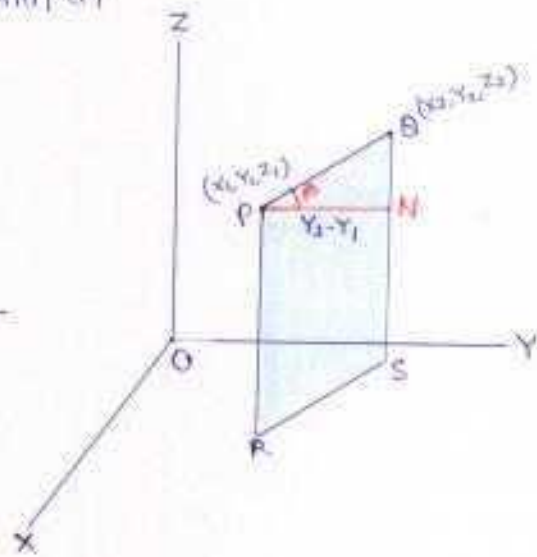
$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{PR}$$

अतः बिन्दुओं  $P(x_1, y_1, z_1)$  तथा  $Q(x_2, y_2, z_2)$  को जोड़ने वाली रेखाखण्ड  $PQ$  के दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

तथा  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$  रेखा  $PQ$  के कि. अनुपात हैं।

जहाँ  $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  बिन्दु  $P$  तथा  $Q$  के बीच की दूरी है।



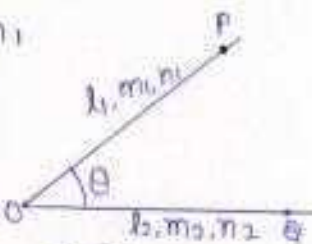
### दो रेखाओं के मध्य कोण -

(i) माना रेखाएँ  $OP$  और  $OQ$  के दिक्-कोसाइन क्रमशः  $l_1, m_1, n_1$

$l_2, m_2, n_2$  हैं, यदि इन रेखाओं के बीच का कोण  $\theta$  हो तो

$$\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

$$\sin \theta = \sqrt{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}$$



(ii) यदि  $a_1, b_1, c_1$  और  $a_2, b_2, c_2$  इन रेखाओं के कि. अनुपात हों तो

$$\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(iii) **दो परस्पर लम्बवत् रेखाएँ** - यदि दो रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं यदि  $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos \pi/2 = 0$

$$\Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$\text{या } a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

(iv) **दो परस्पर समांतर रेखाएँ** - यदि रेखाएँ परस्पर समांतर हों तो  $\theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$

$$\text{यदि } \sin \theta = 0 \text{ तो } m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0 \text{ या } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\text{और } n_1 l_2 - n_2 l_1 = 0 \text{ या } \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$\text{अतः } \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

(v) रेखाएँ  $r = a_1 + \lambda b_1$  तथा  $r = a_2 + \lambda b_2$  के बीच का कोण  $\theta$  हो तो

$$\cos \theta = \frac{|b_1 \cdot b_2|}{|b_1| |b_2|}$$

## अन्तरिक्ष में रेखा का समीकरण

इस अनुच्छेद में हम एक रेखा की अन्तरिक्ष में, सदिश तथा कार्तीय समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

एक रेखा अद्वितीयतः निर्धारित होती है, यदि

- (i) दिया गये बिन्दु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या
- (ii) दो दिये गये बिन्दुओं से होकर जाती है।

**दिये गये बिन्दु A से जाने वाली तथा दिये गये सदिश  $\vec{b}$  के समान्तर रेखा का समीकरण -**

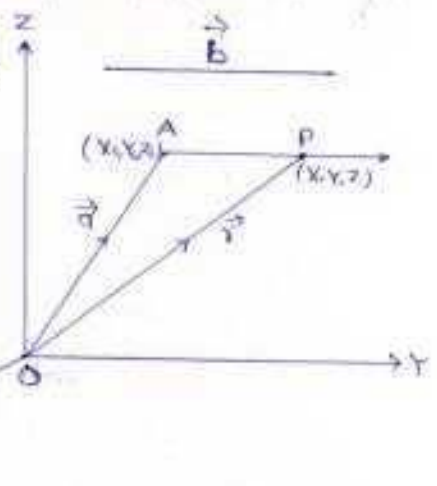
**सदिश समीकरण.** माना बिन्दु A का स्थित सदिश  $\vec{a}$  है। बिन्दु A से जाने वाली तथा दिये गये सदिश  $\vec{b}$  के समान्तर रेखा AP है। P एक स्वेच्छ बिन्दु है जिसका स्थिति सदिश  $\vec{r}$  है।

AP सदिश  $\vec{b}$  के समान्तर है अर्थात्  $\vec{AP} = \lambda \vec{b}$

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$$\lambda \vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$



**कार्तीय समीकरण -** दिये गये बिन्दु A के निर्देशांक  $(x_1, y_1, z_1)$  हैं और रेखा के दिक् अनुपात  $a, b, c$  हैं। माना बिन्दु P के निर्देशांक  $(x, y, z)$  हैं।

$$\text{तब } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{b} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

सदिश समीकरण में मान रखने पर

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + \lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_1 + \lambda a)\vec{i} + (y_1 + \lambda b)\vec{j} + (z_1 + \lambda c)\vec{k}$$

$$x = x_1 + \lambda a, \quad y = y_1 + \lambda b, \quad z = z_1 + \lambda c$$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{a}, \quad \lambda = \frac{y - y_1}{b}, \quad \lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

यदि रेखा बिन्दु AC  $(x_1, y_1, z_1)$  से जाती है और  $l, m, n$  इसके दिक् कोसाइन हैं, तो रेखा का समीकरण

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}$$

**दो दिये गये बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण -**

माना रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं A  $(x_1, y_1, z_1)$  और B  $(x_2, y_2, z_2)$  के स्थित सदिश क्रमशः  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  हैं।

माना बिन्दु P  $(x, y, z)$  का स्थिति सदिश  $\vec{r}$  है।

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

तीनों बिन्दु संरेख हैं।

$$\vec{AP} = \lambda(\vec{AB})$$

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \quad \text{रेखा का सदिश समीकरण है।}$$

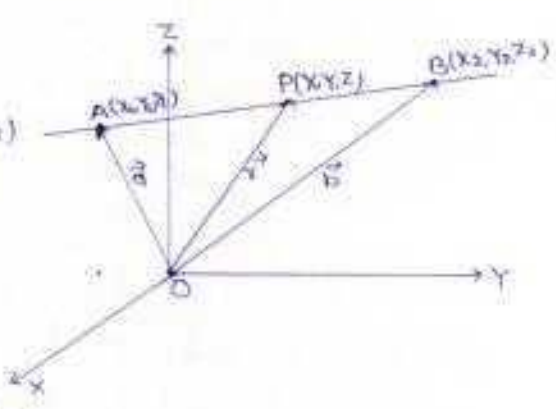
**कार्तीय रूप -**  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ;  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ;  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

सदिश समीकरण में मान रखने पर

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]$$

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1); \quad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1); \quad z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad \lambda = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



## दो रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी -

समतलीय रेखाएँ - वे रेखाएँ जो एक तल में होती हैं, समतलीय रेखाएँ कहलाती हैं। समतलीय रेखाएँ या तो समांतर होती हैं या प्रतिच्छेद करती हैं।

असमतलीय रेखाएँ - अन्तरिक्ष में वे रेखाएँ जो एक तल में नहीं होती हैं, असमतलीय रेखाएँ कहलाती हैं।

असमतलीय रेखाएँ न तो समांतर होती हैं और न ही प्रतिच्छेद करती हैं।

**दो विषमसमतलीय रेखाओं के बीच की दूरी** - दो असमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी वह रेखाखण्ड होती है जो इन रेखाओं द्वारा उभयनिष्ठ लम्ब पर बना अन्तःखण्ड होता है।

माना  $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$  और  $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$  दो विषमसमतलीय रेखाएँ हैं।

माना रेखा  $L_1$  पर बिन्दु  $S$  जिसका स्थिति सदिश  $\vec{a}_1$  और  $L_2$  पर बिन्दु  $T$  जिसका स्थिति सदिश  $\vec{a}_2$  है वह न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण,  $ST$  का न्यूनतम दूरी की दिशा में प्रक्षेप की माप के समान होगा।

यदि बीच की दूरी  $PR$  है तो यह दोनों  $\vec{b}_1$  और  $\vec{b}_2$  पर लम्ब होगा।  $PR$  की दिशा में इकाई सदिश  $\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$  तथा  $|PR| = d$  जहाँ  $d$  न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण है।

माना  $ST$  और  $PR$  के बीच कोण  $\theta$  है तो

$$PR = ST \cos \theta$$

$$\cos \theta = \left| \frac{PR \cdot \hat{n}}{|PR| |\hat{n}|} \right| = \left| \frac{d \hat{n} \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d \cdot ST} \right|$$

$$= \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| ST} \right|$$

अभीष्ट न्यूनतम दूरी,  $d = PR = ST \cos \theta$

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

कार्तीय रूप - रेखा  $L_1$  का कार्तीय समीकरण  $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$  तथा रेखा  $L_2$  का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \text{ है तो}$$

$$\text{न्यूनतम दूरी (S.D.)} = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}$$

यदि रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो

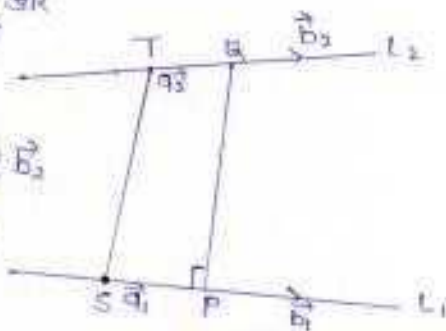
$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

$$\text{या } \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

**समांतर रेखाओं के बीच की दूरी** -

माना दो समांतर रेखाएँ  $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$  और  $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$

इनके बीच की दूरी  $d = \left| \frac{\vec{b}_1 \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1|} \right|$  [दोनों रेखाएँ समतलीय हैं तो  $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 = \vec{b}$ ]



उदाहरण - उस रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु  $A(2, -1, 1)$  से जाती है और बिन्दुओं  $B(-1, 4, 1)$  तथा  $C(1, 2, 2)$  को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल - बिन्दु  $A(2, -1, 1)$  का स्थिति सदिश  $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

बिन्दु  $B(-1, 4, 1)$  का स्थिति सदिश  $= -\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

बिन्दु  $C(1, 2, 2)$  का स्थिति सदिश  $= \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} - (-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})$$

$$= 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

अतः रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{BC}$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} + \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

कार्तीय समीकरण

$$\text{माना } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2+2\lambda)\hat{i} + (-1-2\lambda)\hat{j} + (1+\lambda)\hat{k}$$

$$x = 2+2\lambda, \quad y = -1-2\lambda, \quad z = 1+\lambda$$

$$\lambda = \frac{x-2}{2}, \quad \lambda = \frac{y+1}{-2}, \quad \lambda = \frac{z-1}{1}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

उदाहरण - दिखाइए कि बिन्दु  $A(-2, 3, 5), B(1, 2, 3), C(7, 0, -1)$  संरेख हैं।

हल - रेखा AB का समीकरण

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-5}{3-5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{-2} \quad \dots \textcircled{1}$$

तब बिन्दु संरेख होंगे यदि C बिन्दु समी. (1) को सन्तुष्ट करेगा

$$\Rightarrow \frac{7+2}{3} = \frac{0-3}{-1} = \frac{-1-5}{-2}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{-3}{-1} = \frac{-6}{-2}$$

$$3 = 3 = 3 \text{ जो सत्य है।}$$

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख हैं।

उदाहरण - रेखाओं  $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$  तथा  $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल -  $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{b}_2 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1| |\vec{b}_2|}$$

$$= \frac{(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})}{|\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}| |2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}|}$$

$$= \frac{2 + 8 + 8}{\sqrt{1+4+4} \sqrt{4+16+16}}$$

$$= \frac{18}{\sqrt{9} \sqrt{36}} = \frac{18}{3 \times 6} = 1$$

$$\cos \theta = 1$$

## समतल

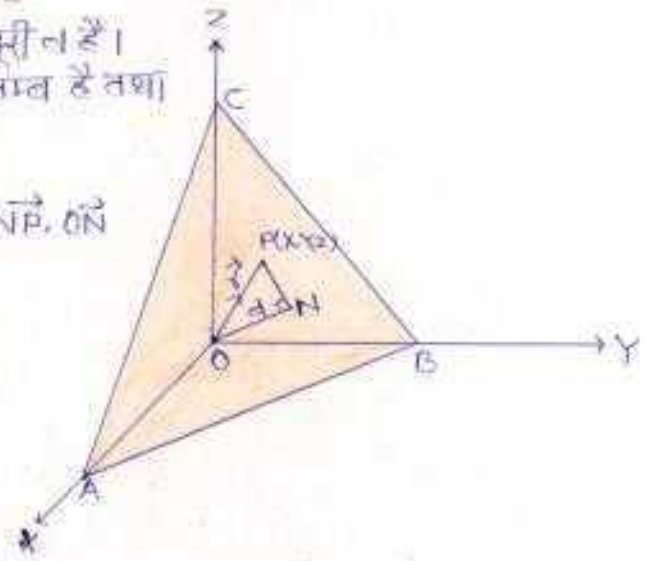
यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा किसी पृष्ठ पर पूर्णरूपेण स्थित हो, तो पृष्ठ को समतल कहते हैं।

**समतल पर अभिलम्ब** - कोई रेखा जो समतल पर स्थित सभी रेखाओं पर लम्ब हो, समतल पर अभिलम्ब कहलाती है। समतल पर सभी अभिलम्ब एक-दूसरे के समान्तर होते हैं। किसी समतल को कई प्रकार से निर्धारित किया जा सकता है।

- \* तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक समतल खींचा जा सकता है।
- \* दो हुई दो संगामी रेखाएँ एक विशिष्ट समतल को निर्धारित करती हैं।
- \* मूलबिन्दु से दी हुई दूरी पर एक दी हुई दिशा के लम्बवत एक और केवल एक समतल खींचा जा सकता है।
- \* एक समतल पर एक बिन्दु और उसका अभिलम्ब अद्वितीय समतल का निर्धारण करते हैं।

### अभिलम्ब के रूप में समतल का समीकरण -

माना समतल ABC की मूलबिन्दु से दूरी  $v$  है।  
मूलबिन्दु  $O$  से समतल ABC पर  $ON$  अभिलम्ब है तथा  $ON$  के अनुदिश मानक सदिश  $\hat{n}$  है।



$ON = v\hat{n}$   
माना समतल पर कोई बिन्दु  $P$  है इसलिए  $NP \cdot \hat{n}$  पर लम्ब होगा।

अतः  $NP \cdot \hat{n} = 0 \dots (1)$

$NP = \vec{r} - v\hat{n}$  [  $\because ON + NP = OP$  ]

समी. (1) से

$(\vec{r} - v\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0$

$(\vec{r} - v\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0, v \neq 0$

$\vec{r} \cdot \hat{n} - v\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$

$\vec{r} \cdot \hat{n} - v = 0$

$\vec{r} \cdot \hat{n} = v$

यह समतल का सदिश समीकरण है।

### समतल का कार्तीय रूप -

माना समतल पर कोई बिन्दु  $P(x, y, z)$  है, तब

$OP = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

माना  $\hat{n}$  के दिक् कोसांश  $l, m, n$  हैं, तब

$\hat{n} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$

$\vec{r} \cdot \hat{n} = v$

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = v$

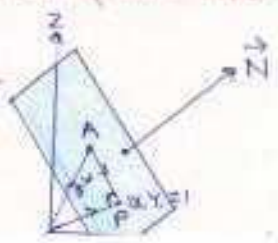
$lx + my + nz = v$

नोट  $\rightarrow$  यदि मूलबिन्दु से समतल की दूरी  $v$  हो और समतल के अभिलम्ब के दिक् कोसांश  $l, m, n$  हो तब लम्ब का पाद  $(lv, mv, nv)$  होता है।

### एक दिये सदिश के लम्बवत तथा दिये हुए बिन्दु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण -

माना समतल बिन्दु  $A$ , जिसका स्थित सदिश  $\vec{a}$  है, से होकर जाता है तथा सदिश  $\vec{n}$  पर लम्बवत है।

माना समतल पर स्थित कोई बिन्दु  $P(x, y, z)$  है जिसका स्थिति सदिश  $\vec{r}$  है। तब बिन्दु  $P$  समतल पर स्थित होगा यदि और केवल यदि  $\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$  पर लम्ब है।



$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$   $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$

**समतल का कार्तीय रूप** - माना कि या हुआ बिन्दु  $A(x_1, y_1, z_1)$  और समतल पर कोई बिन्दु  $P(x, y, z)$  है तथा  $\vec{N}$  के दिक्-अनुपात  $A, B, C$  हैं, तब

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

तब  $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$

$$[(x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}] \cdot (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) = 0$$

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

**तीन असंरेखीय बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण** -

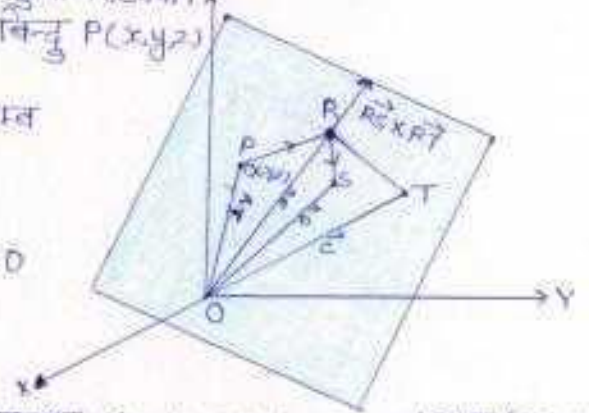
माना समतल पर स्थित तीन असंरेख बिन्दुओं  $R, S$  तथा  $T$  के स्थिति सदिश क्रमशः  $\vec{r}, \vec{s}$  और  $\vec{t}$  हैं, और बिन्दु  $P(x, y, z)$  का स्थिति सदिश  $\vec{r}$  है।

$R$  से जाने वाले तथा सदिश  $\vec{RS}$  और  $\vec{RT}$  पर लम्ब समतल का समीकरण

$$\vec{RP} \cdot (\vec{RS} \times \vec{RT}) = 0$$

$$(\vec{OP} - \vec{OR}) \cdot [(\vec{OS} - \vec{OR}) \times (\vec{OT} - \vec{OR})] = 0$$

$$(x - x_1) \cdot [(b - a)\hat{i} + (c - a)\hat{j}] = 0$$



**समतल का कार्तीय रूप** -

माना बिन्दु  $R, S$  और  $T$  के निर्देशांक क्रमशः  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  तथा  $(x_3, y_3, z_3)$  हैं। समतल पर स्थित बिन्दु  $P$  के निर्देशांक  $(x, y, z)$  का स्थिति सदिश  $\vec{r}$  है

$$\vec{RP} = (x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}$$

$$\vec{RS} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k}$$

$$\vec{RT} = (x_3-x_1)\hat{i} + (y_3-y_1)\hat{j} + (z_3-z_1)\hat{k}$$

इन मानों को सदिश समी.  $\vec{RP} \cdot (\vec{RS} \times \vec{RT}) = 0$  में रखने पर

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

जो तीन बिन्दुओं  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  और  $(x_3, y_3, z_3)$  से गुजरने वाले समतल का समीकरण समझें।

**समतल के समीकरण का अंतःखण्ड रूप** -

यदि कोई समतल निर्देशांकों से क्रमशः  $a, b$  और  $c$  अंतःखण्ड काटता है तो उस समतल का समीकरण  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  होता है। इसे अंतःखण्ड रूप कहते हैं।

माना समतल का व्यापक समीकरण  $Ax + By + Cz + D = 0$  - (1)  
समतल बिन्दु  $A, B$  तथा  $C$  से होकर जाता है अतः

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow A = -D/a$$

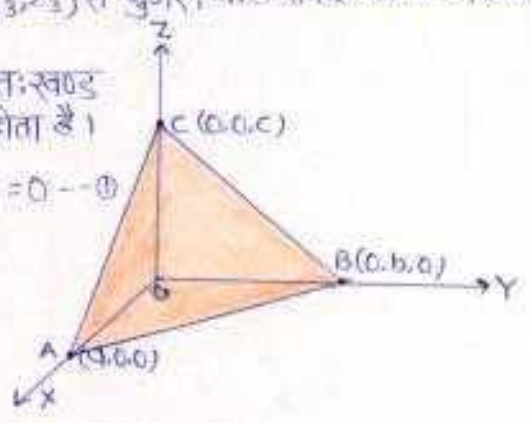
$$\text{इसी प्रकार } A \cdot 0 + B \cdot b + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow B = -D/b$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot c + D = 0 \Rightarrow C = -D/c$$

$A, B, C$  के मान समी. (1) में रखने पर

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

$$-D \left[ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right] = -D$$



दो दिए हुए समतलों के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाला समतल -

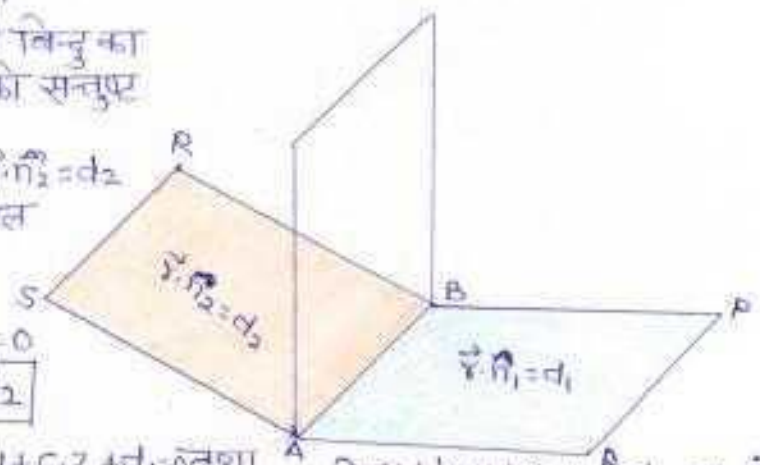
माना दो समतल PQ और RS एक दूसरे को एक सरल रेखा AB पर काटते हैं जिससे समीकरण  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = v_1$  और  $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = v_2$  हैं।

प्रतिच्छेदी रेखा AB पर स्थित किसी बिन्दु का स्थिति सदिश इन दोनों समीकरणों को संतुष्ट करेगा।

ज्ञात: समतलों  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = v_1$  और  $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = v_2$  के प्रतिच्छेदी रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण

$$(\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - v_1) + \lambda(\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - v_2) = 0$$

$$\text{या } \vec{r} \cdot (\vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2) = v_1 + \lambda v_2$$



**कार्यविशेष में** - समतल  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  तथा  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  के प्रतिच्छेदन रेखा से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

$$\Rightarrow (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + d_1 + \lambda d_2 = 0$$

जबकि  $\lambda$  का मान दी हुई शर्त के अनुसार ज्ञात किया जा सकता है।

**उदाहरण** - इस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों  $x + 2y + 3z - 4 = 0$  तथा  $2x + y - z + 5 = 0$  के प्रतिच्छेदी रेखा से जाता है तथा समतल  $5x + 3y + 6z + 1 = 0$  पर लम्ब है।

**हल** - समतलों  $x + 2y + 3z - 4 = 0$  तथा  $2x + y - z + 5 = 0$  के प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाला समतल

$$(x + 2y + 3z - 4) + \lambda(2x + y - z + 5) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{या } (1 + 2\lambda)x + (2 + \lambda)y + (3 - \lambda)z - 4 + 5\lambda = 0$$

समतल  $\textcircled{1}$  समतल  $5x + 3y + 6z + 1 = 0$  पर लम्ब है।

$$5 \cdot (1 + 2\lambda) + 3(2 + \lambda) + 6(3 - \lambda) = 0 \quad [a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0]$$

$$5 + 10\lambda + 6 + 3\lambda + 18 - 6\lambda = 0$$

$$7\lambda = -29$$

$$\lambda = \frac{-29}{7}$$

$\lambda$  का मान समी.  $\textcircled{1}$  में रखने पर

$$(x + 2y + 3z - 4) - \frac{29}{7}(2x + y - z + 5) = 0$$

$$7x + 14y + 21z - 28 - 58x - 29y + 29z - 145 = 0$$

$$-51x - 15y + 50z - 173 = 0$$

$$51x + 15y - 50z + 173 = 0$$

**दो सरल रेखाओं के सहस्रतीय होने का प्रतिबन्ध** -

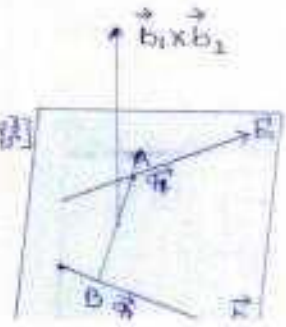
माना दो रेखाओं  $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$  और  $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \quad [A \text{ तथा } B \text{ के स्थिति सदिशों हैं}]$$

रेखाओं सहस्रतीय होगी यदि और केवल यदि  $\vec{AB}$ ,  $\vec{b}_1$  और  $\vec{b}_2$  सहस्रतीय होंगे।

$$\vec{AB} \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$





**कार्तीय रूप** - माना बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः  $(x_1, y_1, z_1)$  और  $(x_2, y_2, z_2)$  हैं तथा  $\vec{b}_1$  और  $\vec{b}_2$  के बीच अनुपात क्रमशः  $a_1, b_1, c_1$  तथा  $a_2, b_2, c_2$  हैं। तब

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$$

$$\vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

रेखाएँ सहतलीय होंगे

$$\vec{AB} \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

**दो समतलों के बीच का कोण** -

“दो समतलों का कोण उनके अभिलम्बों के बीच का कोण होता है”

माना समतल  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$  और  $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$  के बीच का कोण  $\theta$  है। तब किसी सार्व बिन्दु से समतलों पर खींचे गये अभिलम्बों के बीच का कोण  $\theta$  होगा।

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

**कार्तीय रूप** - माना दो समतल  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  तथा  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  हैं तथा उनके बीच का कोण  $\theta$  है तो

$$\cos \theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

+ यदि दो समतलों के बीच  $90^\circ$  का कोण है तो

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

\* समतल समीकरण  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  और  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  परस्पर समान्तर हैं

$$\text{यदि } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

\* समतल का समीकरण:

(i) समतल के समान्तर समतल का समीकरण  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \lambda$

(ii) समतल  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  के समान्तर समतल का समीकरण  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda = 0$

$\lambda$  का मान की हुई शर्तानुसार निश्चित किया जाता है।

**समतल से दिये गये बिन्दु की दूरी** -

माना एक बिन्दु P जिसका स्थिति सदिश  $\vec{r}$  और एक समतल  $\pi_1$  जिसका समीकरण  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ , पुनः बिन्दु P से समतल  $\pi_1$  के समान्तर समतल  $\pi_2$  का अभिलम्ब दशरि सदिश  $\vec{N}$  है।

$$\text{अतः समीकरण } (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$$

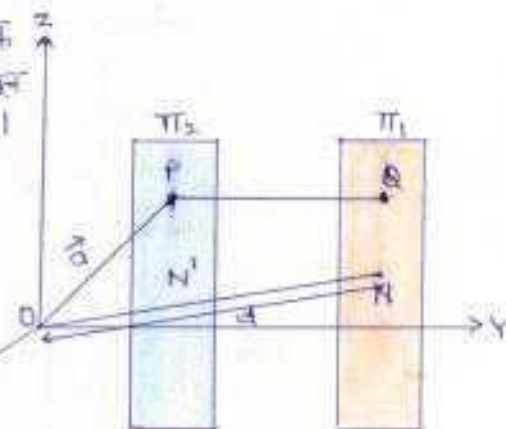
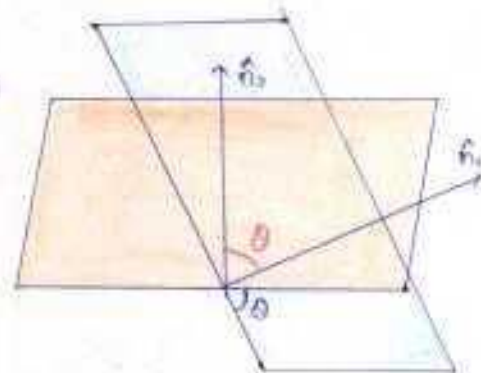
$$\text{अतः मूल बिन्दु से समतल  $\pi_2$  की दूरी} = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n}|$$

$$P \text{ से समतल } \pi_1 \text{ की दूरी} = |d - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}|$$

\* यदि समतल  $\pi_2$  का समीकरण  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  के रूप में है, जहाँ  $\vec{n}$  समतल पर अभिलम्ब है, तो लाम्बिक दूरी

$$\frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|} \text{ है।}$$

\* मूल बिन्दु O से समतल  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  की दूरी  $\frac{|d|}{|\vec{n}|}$  है। ( $\because \vec{r}_0 = 0$ )



**कार्तीय रूप** - माना समतल का समीकरण  $ax+by+cz+d=0$  है तथा P समतल के बाहर एक बिन्दु है जिसके निर्देशांक  $(x_1, y_1, z_1)$  हैं। समतल पर स्थित किसी बिन्दु A के निर्देशांक  $(x, y, z)$  हैं।

समतल से बाहर बिन्दु P से समतल पर PN लम्ब डाला गया है, जिसकी लम्बाई P है।

$P = AP$  का समतल के अभिलम्ब PN पर प्रक्षेप

$$P = \frac{a(x_1-x) + b(y_1-y) + c(z_1-z)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\text{या } P = \frac{ax_1+by_1+cz_1 - (ax+by+cz)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

परन्तु समतल का समीकरण  $ax+by+cz+d=0$

$$\therefore ax+by+cz = -d$$

$$P = \frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\text{दूसरी धनात्मक लंबाई के अतः } P = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

**एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण** - एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच के कोण का पूरक कोण होता है।

**सदिश रूप** - माना रेखा का समीकरण  $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$  तथा समतल का समीकरण  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  है। तब रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच का कोण  $\theta$  होता है।

$$\cos \theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| |\vec{n}|}$$

और यदि रेखा और समतल के बीच का कोण  $\phi$  है तो

$$\phi = 90^\circ - \theta$$

$$\sin \phi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\sin \phi = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| |\vec{n}|} \text{ या } \phi = \sin^{-1} \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| |\vec{n}|}$$

**कार्तीय रूप** - रेखा  $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$  और समतल

$Ax+By+Cz+D=0$  के अभिलम्ब के बीच का कोण  $\theta$  इस प्रकार है

$$\cos \theta = \frac{aA+bB+cC}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

यदि रेखा और समतल के बीच कोण  $\phi$  हो तो

$$\phi = 90^\circ - \theta$$

$$\sin \phi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\sin \phi = \frac{aA+bB+cC}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

\* यदि रेखा समतल पर लम्ब है तो यह समतल के अभिलम्ब के समान्तर होगी। अतः है तथा वे समान्तर होंगे।  $\vec{b} \times \vec{n} = 0$  या  $\vec{b} = \lambda \vec{n}$

\* यदि रेखा समतल के समान्तर है तो यह समतल के अभिलम्ब के लम्बवत् होगी। अतः है तथा वे परस्पर लम्ब होंगे। अतः  $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$

\* कार्तीय रूप में रेखा के समतल पर लम्ब होने का प्रतिबन्ध -

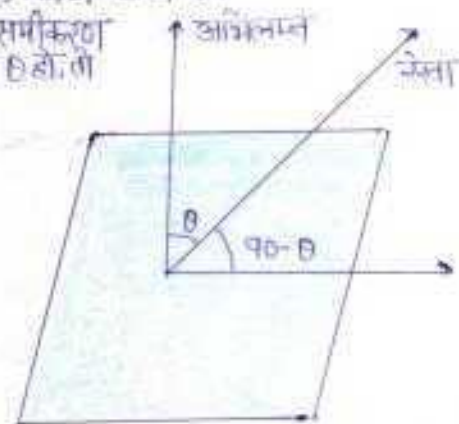
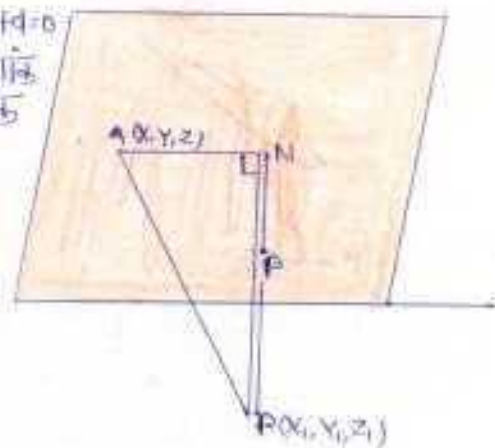
$$\vec{b} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \text{ तथा } \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \text{ समान्तर होंगे।}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

\* कार्तीय रूप में रेखा के समतल के समान्तर होने का प्रतिबन्ध -

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(p+q+r) \cdot (a+b+c) = 0$$



**उदाहरण** - इस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिन्दु से 7 मातक दूरी पर है और सदिश  $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$  पर अभिलम्ब है।

हल -  $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$  के अनुदिश मातक सदिश

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (6)^2}} \\ &= \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{9 + 25 + 36}} \\ &= \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}} \end{aligned}$$

समतल का सदिश समीकरण है  $\vec{r} \cdot \vec{n} = c$  जबकि  $c = 7$

$$\vec{r} \cdot \left( \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}} \right) = 7$$

**उदाहरण** - समतलों जिनके सदिश समीकरण हैं  $(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$  और  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$  हैं, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल - समतल  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$  का अभिलम्ब  $2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  के अनुदिश है।

और समतल  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$  का अभिलम्ब  $3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  के अनुदिश समतलों के बीच कोण  $\theta$ , अभिलम्बों के बीच के कोण के समान है।

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{4+4+9} \sqrt{9+9+25}} \\ &= \frac{6 - 6 - 15}{\sqrt{17} \sqrt{43}} \\ &= \frac{-15}{\sqrt{17} \sqrt{43}} \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{-15}{\sqrt{17} \sqrt{43}} \right)$$

**उदाहरण** - समतल  $2x - y + 2z + 3 = 0$  की बिन्दु  $(3, -2, 1)$  से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल - बिन्दु  $(3, -2, 1)$  से समतल  $2x - y + 2z + 3 = 0$  की दूरी

$$\begin{aligned} &= \frac{|2 \cdot 3 - (-2) + 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|6 + 2 + 2 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|13|}{\sqrt{9}} = \frac{13}{3} \text{ मातक} \end{aligned}$$

**उदाहरण** - बिन्दु  $(-1, -5, -10)$  से रेखा  $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$  और समतल  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$  के प्रतिच्छेदन बिन्दु के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल - रेखा  $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$  और समतल  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$  से मिलती है।

$$[2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})] \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$$

$$(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$$

$$(2 + 1 + 2) + \lambda(3 - 4 + 2) = 5$$

$$5 + 1\lambda = 5$$

$$\lambda = 0$$

समतल रेखा और समतल का प्रतिच्छेद बिन्दु  $= 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

दिया गया बिन्दु  $= -\hat{i} - 5\hat{j} - 10\hat{k}$

$$\text{इन बिन्दुओं की मध्य दूरी} = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (-1 - (-5))^2 + (2 - (-10))^2}$$

## प्रश्नावली

प्रश्न 1- बिन्दु  $(1, 2, -4)$  से जाने वाली और दोनों रेखाओं  $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$  और  $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$  पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। (2012)

प्रश्न 2- बिन्दु  $(-1, 3, 2)$  से जाने वाले तथा समतलों  $x+2y+3z=5$  और  $3x+3y+z=0$  में से प्रत्येक पर लम्ब समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। (2012)

प्रश्न 3- दो बिन्दुओं  $(4, 2, 3)$  तथा  $(4, 5, 7)$  को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोणार्थ लिखिए। (2010)

प्रश्न 4- सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-3}{4}$$

एक ही समतल  $x-2y+z+7=0$  पर स्थित हैं।

(2010)

प्रश्न 5- सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ  $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$  व  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$  सहस्रतीय हैं।

(2013)

प्रश्न 6- रेखाओं जिसके सदिश समीकरण  $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$  और  $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$  हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। (2014)

प्रश्न 7- यदि एक समतल के अन्तःखण्ड  $a, b, c$  हैं और इसकी मूल बिन्दु से दूरी  $p$  इकाई है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$$

प्रश्न 8- रेखाओं  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$  और  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$  के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9- बिन्दु  $(5, -3, 2)$  की समतल  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) = 6$  से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10- समांतर समतलों  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 10$  तथा  $\vec{r} \cdot (10\hat{i} + 15\hat{j} + 20\hat{k}) + 25 = 0$  के मध्य लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11- सिद्ध कीजिए कि समतलों  $4x + 4y - 5z = 12$  तथा  $8x + 12y - 13z = 32$  की प्रतिच्छेदी रेखा का समीकरण

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4} \quad \text{है।}$$

उत्तरमाला 1 →  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ , 2 →  $7x - 8y + 3z + 25 = 0$ , 3 →  $0, 3/5, 4/5$   
 6 →  $3/11$ , 8 →  $2\sqrt{29}$ , 9 → 4, 10 →  $40/5\sqrt{29}$  इकाई